

金融数学 · 基础教程

金融数学基础

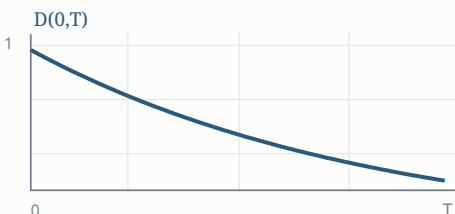
从现金流到 Black-Scholes

概念、证明与计算

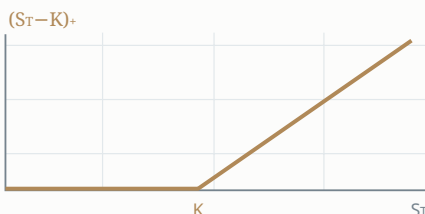
01 / 现金流与贴现

$$D(0,T)=e^{-rT}$$

贴现因子随期限变化



欧式看涨期权的到期收益



Zoey Lin

教学与自学用修订稿

2026 · 10

EDITORIAL NOTE

版本与使用说明

本书资料

书名	金融数学基础
副标题	从现金流到 Black-Scholes
署名	Zoey Lin
版本	2026 年 10 月 · 排版与文字修订
文件	A4 PDF, 含目录与分层书签

关于本书

本书面向初次系统学习金融数学的读者。内容从现金流、复利和概率开始，逐步讨论债券、资产组合、衍生品定价、随机过程及数值方法。各章保留尽可能完整的中间计算，便于复算。

阅读与引用

书中的模型参数及交易场景仅用于教学。引用或转发时，请保留书名与署名。发现计算或排版错误，建议记录页码、原公式、参数约定及复算结果，便于之后校订。

此次修订统一了书名、封面、前言、目录与部分正文书眉，正文主要推导和习题保持原有顺序。数值例题尚未完成全书逐题独立审定。

PREFACE

序言

金融数学中的许多公式，写出来很简洁，第一次计算却未必容易。一条求和式包含数期现金流，条件期望需要分别考虑不同的信息状态，协方差矩阵则把许多乘积压缩为一行。理解这些表达，需要把省略的步骤重新展开。

全书从现金的时间价值出发。债券章节延续现金流贴现的思路，概率与矩阵帮助描述收益的不确定性，复制组合把无套利条件转化成定价关系。随后，离散模型逐渐过渡到布朗运动和随机微积分，最后进入 Black-Scholes 与常用数值算法。

阅读推导时，应特别留意每个模型的约定。利率采用哪一种复利口径，波动率是否经过年化，概率属于真实世界还是风险中性测度，都会改变公式的使用方式。数值计算中，保留中间精度通常比提前四舍五入更可靠。

对较难的章节，可以先沿着例题把运算完整做一遍，再返回定义与证明。计算结果应尽可能接受第二种检验，例如重新贴现债券现金流，检查期权的看涨看跌平价关系，或展开矩阵乘法核对组合方差。

阅读时值得保留的三个习惯

1. 先说明期限、利率、波动率等量的单位。
2. 列出全部假设，再开始代入计算。
3. 用符号、边界条件与数量级检查结果。

READING GUIDE

全书结构

十个学习部分按概念之间的依赖关系排列。前半部分建立利率、概率与线性代数工具；后半部分转向定价模型、数值算法和风险测量。

01 现金流与利率

终值、现值、贴现因子

02 概率与统计

条件期望、方差、相关性

03 固定收益

债券、久期、收益率曲线

04 资产组合

协方差矩阵、最优化

05 离散定价

复制策略、二叉树、美式期权

06 随机微积分

布朗运动、Itô 引理

07 连续定价

Black-Scholes、Greeks

08 数值方法

Monte Carlo、差分、回归

09 风险管理

VaR、ES、案例分析

10 综合训练

计算、复核与复习

目录

01 / 05

01 利率与现金流 014

现金的时间价值	015
利率口径与复利换算	020
年金、净现值与内部收益率	023
贴现因子与远期利率	031
现金流的无套利定价	032
非线性求根与现金流复核	034
现金流与贴现因子的联系	035

02 概率与统计基础 037

随机变量、期望与方差	038
正态分布与标准化	041
条件期望与 Bayes 公式	043
协方差、相关系数与线性回归	050
条件期望、方差分解与信息价值	054
全方差公式的数值解释	056
方差估计与样本分位数	058
条件期望与全方差的完整推导	059

目录

03	固定收益与利率曲线	060
	债券价格与到期收益率	061
	久期、凸性与 DV01	067
	零息曲线、远期利率与互换	074
	债券敏感度与收益率曲线	078
	债券价格函数的微分	080
	债券定价与凸性复核	082
04	资产组合与最优化	083
	组合方差及其矩阵形式	084
	最小方差组合与 CAPM	090
	收益、风险与组合约束	096
	最小方差权重的矩阵求解	098
	组合优化的约束与权重	100
	协方差矩阵与最小方差推导	101



目录

05	离散时间的衍生品定价	102
	远期、期货与看涨看跌平价	103
	复制组合与二叉树	107
	美式期权的继续持有价值与行权价值	112
	状态价格与提前行权	117
	两期二叉树的回溯计算	119
	美式看跌期权的节点演算	120
	风险中性概率与复制组合	122
06	随机过程与随机微积分	123
	布朗运动与二次变差	124
	Itô 引理	127
	Girsanov 定理与漂移变换	135
	从离散和到 Itô 积分	139
	Itô 修正项	141
	离散平方和与随机积分	143
	二次变差与随机积分复核	144



目录

07	Black-Scholes 与波动率	145
	Black-Scholes 偏微分方程	146
	闭式定价公式的逐项计算	151
	Greeks 与隐含波动率	160
	对数正态积分与标准正态分布	166
	Black-Scholes 的积分推导	167
	公式中的两个正态分布函数	170
	Black-Scholes 的数值复核	172
08	金融数值方法	173
	Monte Carlo 估值与标准误	174
	反变量、控制变量与 Cholesky 分解	179
	有限差分与 Longstaff-Schwartz	184
	降方差与差分近似	191
	数值模拟、误差与离散方程	192
	数值定价的误差来源	194
	模拟、差分与 LSM 复核	196



目录

09	风险管理与案例	197
	VaR、ES 与 GARCH	198
	期权定价与对冲的完整案例	203
	固定收益交易台的计算流程	205
	从样本协方差到风险贡献	207
	市场数据与风险报告	209
	风险度量的单位与尾部解释	210
	VaR 与 ES 的估计口径	211
	历史分位数与 ES 的数值解释	212
10	习题、附录与复习	213
	概念辨析与计算训练	214
	综合练习及答案讨论	217
	二十个重要计算方法	222
	十四天复习安排	223
	计算复核与编辑说明	224
	结语	225



NOTATION

符号与计量口径

常用记号

PV / FV	现值 / 终值
r	利率；每题先确认复利与期限口径
$D(0,T)$	从今天到 T 时刻的贴现因子
S, K, T	现价、执行价、剩余到期时间
C, P	欧式看涨、看跌期权价格
σ	波动率，通常按年化小数计入模型
$W(t)$	标准布朗运动
$E[X F(t)]$	给定当前信息后的条件期望
P, Q	真实概率测度与定价测度
Delta / Gamma / Vega	价格的一阶、二阶与波动率敏感度
DV01	利率变化 1 bp 对价格的影响量级
VaR / ES	损失分位数 / 尾部预期损失

计量提示

1 bp = 0.01% = 0.0001。带入公式时 **5%** 写作 **0.05**；波动率从日度转换为年化时，独立同分布假设下使用 $\sqrt{T}$ 规则。

CALCULATION NOTES

数值精度与复核示范

为什么不要过早四舍五入

下面两组数值可作为随手检查的基准。复算时先保持足够的小数位，最后再根据题目要求呈现近似结果。

示例一 四年期固定票息债券

面值 100；票息 6%；年付息；到期收益率 5%。

第 1 期现值	5.714286
第 2 期现值	5.442177
第 3 期现值	5.183026
第 4 期现值	87.206462
合计	103.545951

示例二 欧式看涨期权

$S_0=100$, $K=105$, $T=0.5$, $r=4\%$, $q=1\%$, $\sigma=25\%$ 。

$d1 = -0.102758$	$d2 = -0.279534$
$N(d1) = 0.459078$	$N(d2) = 0.389917$
$\text{Call} = 5.548166$	

核对的顺序

单位 → 输入参数 → 中间量 → 最终价格 → 套利边界或独立算法。读者使用不同计算器时，末位数字可能因正态分布函数的近似算法略有差别。

记号、计息口径与计算检查

在金融数学里，同一个字母往往代表几种不同的对象。计算开始前，先确认单位和模型假设，可以避免许多看似复杂的错误。

记号	本书约定	使用时的判断
r_d	单期离散无风险利率	银行账户增长因子 $R = 1 + r_d$
r_c	连续复利无风险利率	$R = e^{r_c \Delta t}$
δ	连续股息率	股票风险中性漂移 $r_c - \delta$
p, p_u	真实世界概率	描述频率或条件预测
q_u	二叉树风险中性权重	从无套利复制关系求出
$\mathbb{P}, \mathbb{Q}$	真实与定价测度	记号大写以区别期权价格
$P(y), B$	债券价格	价格函数与随机变量应分清
C, U	看涨期权价格、效用	不使用 C 兼指协方差
Σ	资产协方差矩阵	数值单位为收益率的平方
$N(x), n$	正态分布函数、样本数	Monte Carlo 路径数另记为 M

把年化利率 5% 代入计算时须写成 0.05。利率上升一个基点意味着 $\Delta r = 0.0001$ ；波动率上升一个百分点意味着 $\Delta \sigma = 0.01$ 。两种变化都表现为百分号，进入导数公式时的单位却必须按小数处理。

同一期限，两种计息方式

如果一年有效利率为 $r_d = 5\%$ ，其增长因子是 1.05。连续复利率应满足

$$e^{r_c} = 1.05, \quad r_c = \ln 1.05 = 0.0487901642.$$

因此，用连续复利率 $r_c = 0.05$ 计算的一年增长因子是 $e^{0.05} \approx 1.051271$ ，比 1.05 略大。二叉树折现时使用哪个数字，须与风险中性权重的计算保持一致。

本书在涉及债券时，默认每期年复利并明确列出票息时点；涉及 Black–Scholes 时，采用连续复利和连续股息率。若合同采用半年计息、ACT/365 或其他日计数法，需重新构造各期增长与贴现因子。

一种简短而有效的验算顺序

先检查模型输入的计量口径，再核验每个中间量的符号与数量级，最后用另一种计算方法验证结果。债券可直接逐笔贴现核价，二叉树可同时用复制组合与风险中性贴现，欧式期权可检查看涨看跌平价。上述检查彼此独立，因而比反复代入同一公式更容易发现错误。

审校方法与修订说明

本次修订以公开分享的 203 页版本为基础。正文现有的公式、图解和题目保持原有学习顺序，重点重新计算了贴现、YTM、无套利复制、组合风险、欧式期权、蒙特卡洛和尾部风险等核心算例。以下精读页放在相应章节之后，可直接从上一章的符号和数字继续阅读。

数值复核采用的原则

计息约定、时间单位与支付日先于数值运算确定。代数推导使用符号精确表达，数值代入保留足够中间位数，在结果展示时统一取合理精度。正态分布函数采用标准正态累积概率 $N(x) = P(Z \leq x)$ ，波动率写作小数，利率变动 $1 \text{ bp} = 10^{-4}$ 。

抽查记录。四年期票息债（票息 6、面值 100、收益率 5%）的价格为 103.5459505；修正久期 3.5040672，凸性 16.2089764。在 $S = 100, K = 105, T = 0.5, r = 4\%, q = 1\%, \sigma = 25\%$ 下，欧式看涨价格 5.5481663，Delta 0.4567880，Gamma 0.0223368，Vega 27.9209832。这些数字都可在后续专页中复算。

需要特别说明的范围

本次进行了跨章节的重点公式核查和指定数值重算，也查阅了目录、标题和页眉的表现。保留原文中的定性解释和教学示例；尚不应将此版称为经过逐字逐式、第三方独立审定的学术版本。对发现存在争议的经验分位数口径，采用明确的定义重新编排。

编辑语言

新增正文优先使用连续陈述和证明，不再在每一段前加固定的提示标签。原稿中仍可能出现用于初学者引导的口语化表达；本轮先修订容易引起歧义或数学错误的地方，再逐步推进全书语言统一。

第一部分

起步与利率基础

Zoey Lin

第 1 章

时间价值：为什么同样的 100 元，今天比一年后更值钱

先把“时间价值”想成搬运现金流

现金流与计息

现金的价值取决于金额和支付日期。每期利率为 r 时，经过 n 期的增长因子是 $(1+r)^n$ 。未来的现金流除以这一因子，便得到相应现值。比较几个方案时，应将不同日期的金额换算至同一时点。

符号及单位

PV = present value, 今天的价值; FV = future value, 未来价值; r = 每一期利率; T = 期数。

看到 $(1+r)^T$, 先不要把它当成抽象幂函数。它就是“连续做 T 次：乘以 $1+r$ ”。例如 $r = 5\%$: 第一年乘 1.05, 第二年再乘 1.05, 所以两年就是 1.05^2 。

两期复利的演算

今天 200 元，年利率 10%，两年后是多少？

第 1 年末： $200 \times 1.10 = 220$ 。

第 2 年末： $220 \times 1.10 = 242$ 。

所以 $FV = 200 \times 1.1^2 = 242$ 。

反过来，如果两年后有 242 元，今天价值就是 $242/1.1/1.1 = 200$ 。

常见误算

最容易混淆的是“利率”和“增长因子”。5% 是 0.05，增长因子才是 1.05。公式里乘的是 1.05，不是 0.05。

统一估值时点

资金在持有期间可以产生收益。即使金额相同，发生日期不同的两笔现金流也具有不同的现值。计算之前应先选定一个共同的估值时点。

1.1 现金流时间线

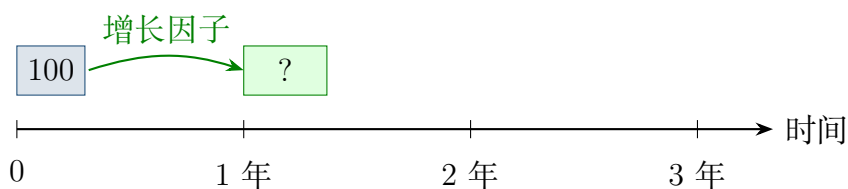


图1.1 现金流时间轴与现值、终值的换算方向。

1.2 终值与现值

例题

例 1：现在有 100 元，年利率 5%，1 年后是多少钱？

若按单利： $FV = 100(1 + 0.05) = 105$ 。

若按年复利：1 年也还是 $100(1 + 0.05) = 105$ 。

若是 2 年： $FV = 100(1 + 0.05)^2 = 110.25$ 。

反过来，若 2 年后拿到 110.25 元，今天值多少钱？

$$PV = \frac{110.25}{(1 + 0.05)^2} = 100.$$

结果核对

先判断方向：

- 往未来推，数值应该**变大**；
- 往今天折，数值应该**变小**；
- 如果折现后反而更大，通常是贴现因子写反了。

1.3 连续复利的直觉

例题

例 2：连续复利 5%，3 年后 100 元变多少？

$$FV = 100e^{0.05 \times 3} = 100e^{0.15}.$$

因为 $e^{0.15} \approx 1.161834$ ，所以

$$FV \approx 116.1834.$$

如果反过来已知 $FV = 116.1834$ ，则

$$r = \frac{\ln(FV/PV)}{T} = \frac{\ln(1.161834)}{3} = 0.05.$$

相关知识

以后在 GBM、Hazard Rate、生存概率、OU 半衰期里，都会用到完全一样的动作：先把比值拿出来，再取对数，再除时间。

1.4 三种计息方式放在同一张图里

说明

假设本金都是 100，年利率都写成 10%，区别只在于“利息多久滚进本金一次”。单利像每年固定加 10；复利像雪球，每年把上一年的利息也继续滚；连续复利则把“滚雪球”切成无限细的小时间片。

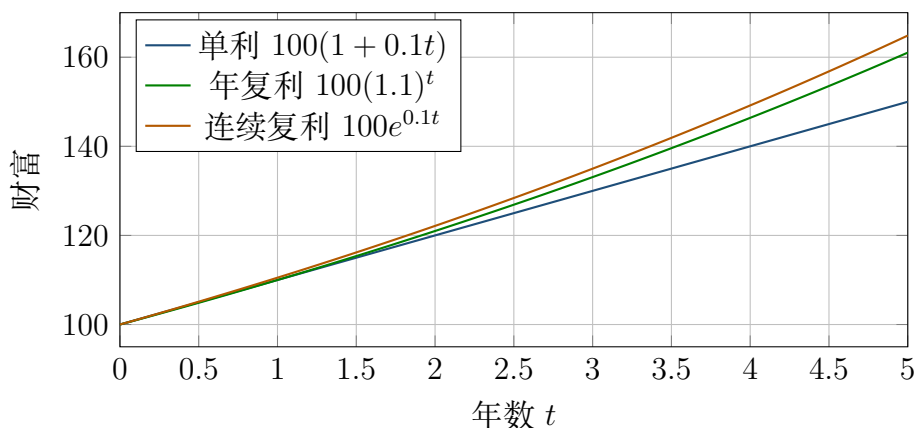


图 1.2: 时间越长，复利与单利的差距越明显。

变式

本金 100，年利率 8%，2 年。先猜三种计息结果的大小顺序，再看数字：单利 = 116；年复利 = $100(1.08)^2 = 116.64$ ；连续复利 = $100e^{0.16} \approx 117.35$ 。顺序应是连续复利 > 年复利 > 单利。

1.5 利率及其计息约定

设银行 A 写着“年利率 6%”，银行 B 也写着“年利率 6%”。如果 A 按年结息，B 每月结息，年底的实际增长并不完全相同。原因不在于某家银行另有收益，而在于“利率”只有配上计息周期才成为完整的数量。

假定本金是 100 元。A 年末一次结息，得到 $100(1 + 0.06) = 106$ 元。B 每个月计息一次，每个月对应的利率为 $0.06/12 = 0.005$ ，因此年底的金额为

$$100(1 + 0.005)^{12} \approx 106.1678.$$

同样的名义年利率，实际年收益分别是 6% 和约 6.1678%。后者略高，是因为前几个月得到的利息也开始计息。

把每年结息次数记为 m ，则实际年收益率（effective annual rate）为

$$R_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{r_{\text{nom}}}{m}\right)^m - 1.$$

这个式子并不难记：先求每期的增长因子，再乘 m 次，最后减去本金对应的 1。

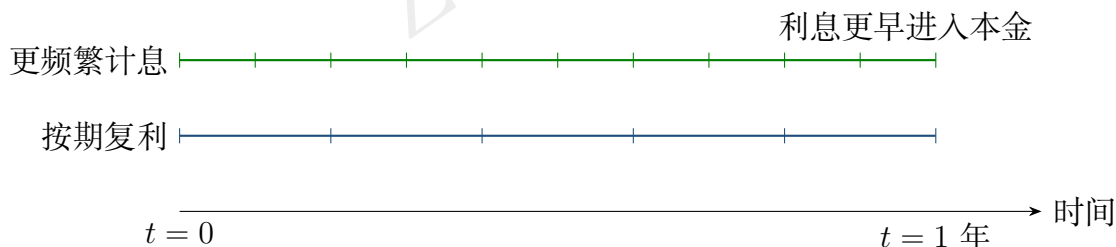


图1.3 名义年利率相同时，结息频率对有效增长的影响。

当 m 趋于无穷大时， $(1 + \frac{r}{m})^m \rightarrow e^r$ 。连续复利不是另一种神秘的利息，而是“把计息周期越切越细”的极限。因而在连续复利口径下， T 年增长因子是 e^{rT} ，贴现因子是 e^{-rT} 。

两种利率口径之间的具体转换

假设某投资一年的实际收益率为 8%，相应连续复利年利率 r_c 满足

$$e^{r_c} = 1.08, \quad r_c = \ln(1.08) \approx 0.076961.$$

所以 8% 的实际年收益，对应约 7.6961% 的连续复利利率。反向核验： $e^{0.076961} - 1 \approx 0.08$ 。

还需要区分名义收益率与通货膨胀调整后的实际收益率。若一年名义增长因子为 1.08, 价格水平增长因子为 1.03, 购买力增长因子便是 $1.08/1.03$, 实际收益率为

$$R_{\text{real}} = \frac{1.08}{1.03} - 1 \approx 4.8544\%.$$

这与直接用 $8\% - 3\% = 5\%$ 稍有差别。后者只是利率较小时的近似。

Zoey Lin

第 2 章

利率口径转换：名义、实际、有效、连续复利别混在一起

为什么金融里会有这么多“利率”

复利约定

名义利率、有效利率与连续复利各有明确的计息约定。即使标示的年利率相同，结息频率不同也会造成终值差异。比较借贷成本时，应先换算到相同期限和复利口径。

从名义利率一步步换成有效年利率

名义年利率 12%，按月复利。先分清楚：12% 不是每月 12%，而是一年名义上 12%。
每月利率 $= 12\% / 12 = 1\% = 0.01$ 。
一年有 12 次，所以一年增长因子 $= (1.01)^{12} \approx 1.126825$ 。
因此有效年利率 $= 1.126825 - 1 = 12.6825\%$ 。

结果核对

为什么有效年利率比 12% 大？因为前几个月产生的利息，后几个月也会继续生利息，这就是“利滚利”。

2.1 从名义年利率到有效年利率

例题

名义年利率 4.8%，每半年复利一次。
半年利率 $= 4.8\% / 2 = 2.4\% = 0.024$ 。
一年增长因子 $= (1 + 0.024)^2 = 1.048576$ 。
所以有效年利率 $\text{EAR} = 4.8576\%$ 。

常见误算

最常见错误：把 4.8% 直接除成 2.4，而忘了写成 0.024；或者把“18bp”误当成“18%”。

2.2 bp 与百分点

例题

例：收益率从 3.20% 上升 18bp。

1bp = 0.01% = 0.0001。

18bp = 0.18% = 0.0018。

新收益率 = 3.20% + 0.18% = 3.38%。

2.3 把“折现”拆成五个可以一眼检查的小动作

说明

第一次做 NPV 题，可以完全不背求和号。你只需要问五个问题：哪一天收钱、收到多少、折到哪一天、除以多少、最后加不加最初投入？

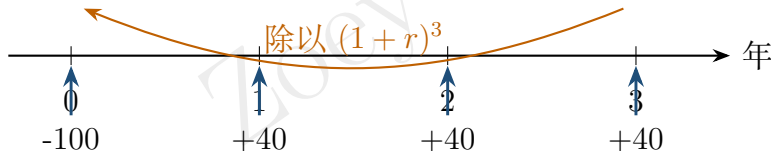


图2.1 各期现金流贴现至零时点后汇总得到净现值。

四行演算：从原始现金流到 NPV

贴现率 8%，初始投资 100，未来 3 年每年收 40。先列一张小表：

年份	收到现金	贴现因子	今天的现值
0	-100	1	-100.0000
1	40	$1/1.08$	37.0370
2	40	$1/1.08^2$	34.2936
3	40	$1/1.08^3$	31.7533

先把未来三笔现值相加： $37.0370 + 34.2936 + 31.7533 = 103.0839$ 。再减去第 0 年的投资： $NPV = 103.0839 - 100 = 3.0839$ 。

变式

如果把贴现率从 8% 提高到 10%，所有未来收款都要除以更大的数，所以 NPV 会下降。不必按计算器，你也应当先预测这个方向。

常见误算

现金流发生在第 t 年末，所以指数用 t ；如果第一笔发生在今天，就不能再多贴现一年。许多题目不是公式错，而是时间线没画对。

Zoey Lin

第 3 章

年金、净现值与内部收益率

NPV 其实就是“把未来的钱搬回今天再相加”

现金流的支付日期

净现值计算从现金流日期开始。将各笔未来收入和支出依照相应期限折现，并计入初始投入，所得总额就是项目的净现值。时间线能够帮助识别遗漏的支付时点。

为什么 IRR 是一个“反解利率”的问题

假设今天付 100，一年后收 60，两年后再收 60。IRR 是让 NPV 恰好等于 0 的利率 r ：

$$-100 + \frac{60}{1+r} + \frac{60}{(1+r)^2} = 0.$$

注意：这里 r 在分母里，还带平方，通常无法靠简单移项直接解出，所以我们把它看成 $f(r) = 0$ 的求根问题，用二分法或 Newton 法。

常见误算

IRR 不是“平均收益率”。它是一个使项目现值刚好为零的折现率。现金流符号复杂时，甚至可能出现多个 IRR。

3.1 普通年金的现值

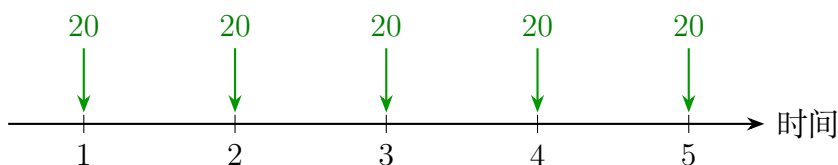


图 3.1: 年金就是“等间隔、等金额”的现金流。

例题

每年末收 20 元，共 5 年，贴现率 6%。

$$PV = \sum_{t=1}^5 \frac{20}{(1.06)^t}.$$

逐项算：

$$\begin{aligned}\frac{20}{1.06} &= 18.8679, \\ \frac{20}{1.06^2} &= 17.7999, \\ \frac{20}{1.06^3} &= 16.7924, \\ \frac{20}{1.06^4} &= 15.8419, \\ \frac{20}{1.06^5} &= 14.9452.\end{aligned}$$

所以

$$PV \approx 84.2473.$$

结果核对

如果你用公式

$$PV = C \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

也应得到同样结果。一个逐项贴现，一个闭式公式，这是第一组最值得养成的“双重复核”。

3.2 NPV 与 IRR

例题

项目今天投入 100，以后 3 年每年回收 40，贴现率 8%。

说明

做 NPV 时，不要先背“净现值公式”。先把每一笔未来现金流想成一个箱子，再把每个箱子搬回今天。最后才把它们加起来，并减去今天的投入。

$$NPV = -100 + \frac{40}{1.08} + \frac{40}{1.08^2} + \frac{40}{1.08^3}.$$

逐项：

$$\begin{aligned}\frac{40}{1.08} &= 37.0370, \\ \frac{40}{1.08^2} &= 34.2936, \\ \frac{40}{1.08^3} &= 31.7533.\end{aligned}$$

因此

$$NPV \approx -100 + 103.0839 = 3.0839 > 0.$$

所以项目可接受。

3.3 IRR 用二分法慢慢夹出来

说明

IRR 只是“让 NPV 恰好等于 0 的贴现率”。所以你完全可以不用 Newton，先用最笨但最稳的二分法：找一个 NPV 为正的利率，再找一个 NPV 为负的利率，答案一定夹在中间。

例题

继续用项目 $(-100, 40, 40, 40)$ 。

先试 $r = 9\%$ ：

$$NPV(9\%) = -100 + 36.697 + 33.667 + 30.887 = 1.251 > 0.$$

再试 $r = 10\%$ ：

$$NPV(10\%) = -100 + 36.364 + 33.058 + 30.053 = -0.525 < 0.$$

因此 IRR 在 9% 和 10% 之间。

试中点 9.5%：

$$NPV(9.5\%) \approx -100 + 36.530 + 33.361 + 30.466 = 0.357 > 0.$$

所以区间缩成 $[9.5\%, 10\%]$ 。

再试 9.75%，继续缩小区间。反复做几次，就能得到 IRR 约 9.7%。

补充观察

记住：YTM、IRR、隐含波动率，本质都是同一件事——寻找一个输入 x ，让“模型输出 - 市场目标 = 0”。

3.4 再算一笔不等间隔的现金流

假设今天投资 100 元，半年后得到 30 元，1 年后得到 45 元，2 年后再得到 40 元。若按年有效利率 6% 贴现，三笔收入不能直接相加。半年后的现金流只经过半年的贴现，最后一笔则要经过整整两年。

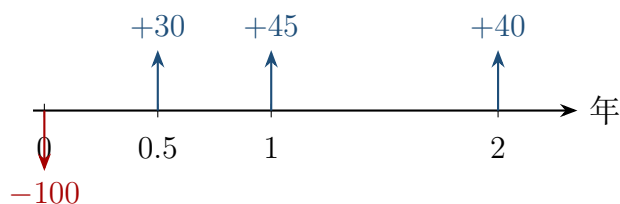


图 3.2: 先画现金流，再把各期金额逐笔折到今天。

$$\begin{aligned} PV(0.5) &= \frac{30}{1.06^{0.5}} = \frac{30}{1.029563} \approx 29.139, \\ PV(1) &= \frac{45}{1.06} \approx 42.453, \\ PV(2) &= \frac{40}{1.06^2} = \frac{40}{1.1236} \approx 35.600. \end{aligned}$$

所以现金流的总现值约为 107.192 元，项目净现值约为 7.192 元。这里没有使用任何特殊的金融公式；我们只是把发生在不同时间的金额改写成同一时间的金额。

算前先看

贴现率为正，所以每笔未来收入的现值都应该小于其名义金额。三笔收入合计 115 元，现值约为 107 元，在方向上没有问题。

3.5 用二分法求解内部收益率

考虑一个更短的项目：现在支付 100 元，一年后收到 60 元，两年后再收到 60 元。内部收益率 y 是使净现值恰好为零的利率：

$$f(y) = -100 + \frac{60}{1+y} + \frac{60}{(1+y)^2} = 0.$$

二分法的前四轮

我们先在 10% 和 15% 之间查找：

y	$\frac{60}{1+y} + \frac{60}{(1+y)^2}$	$f(y)$
10%	$54.5455 + 49.5868 = 104.1323$	+4.1323
15%	$52.1739 + 45.3686 = 97.5425$	-2.4575
12.5%	$53.3333 + 47.4074 = 100.7407$	+0.7407
13.125%	$53.0387 + 46.8850 \approx 99.9237$	-0.0763

因为 12.5% 的价格略高于 100，而 13.125% 的价格略低于 100，根已经被夹在这两个数之间。之后每次只取区间中点，重复同样的操作。

二分法的好处不是“快”，而是稳定：只要价格关于收益率连续、两端净现值异号，就可以逐轮缩小区间。再看这个例子，现金流只有两个日期，因此也能做代数检验。令 $x = 1/(1+y)$ ，那么

$$60x + 60x^2 = 100 \iff 3x^2 + 3x - 5 = 0.$$

解二次方程得到 $x = (-3 + \sqrt{69})/6$ ，再由 $y = 1/x - 1$ 得到利率。它是二分法答案的一个独立检验。

3.6 把内部收益率当成一个实际的方程来解

有一个项目，今天付出 100 元，此后三年末各收回 40 元。若先不知道贴现率，我们就把贴现率保留成变量 x 。令净现值为零：

$$f(x) = -100 + \frac{40}{1+x} + \frac{40}{(1+x)^2} + \frac{40}{(1+x)^3} = 0.$$

为什么求根？因为内部收益率（IRR）正是使这一串现金流的现值刚好等于初始投入的贴现率。在这个例子里，每期现金流均为正， $x > -1$ 时 $f(x)$ 随 x 严格下降，所以根只有一个。

先判断根所在区间。取 $x = 8\%$ ，三笔现金流的现值依次是 37.0370, 34.2936, 31.7533，总计 103.0839；此时 $f(0.08) = 3.0839 > 0$ 。取 $x = 10\%$ ，三笔现值约为 36.3636, 33.0579, 30.0526，总计 99.4741；因此 $f(0.10) = -0.5259 < 0$ 。根必在 8% 和 10% 之间。

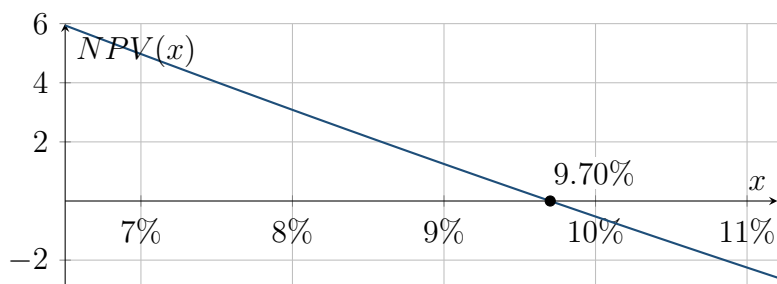


图 3.3: 在本例中，贴现率升高会使 NPV 下降。IRR 是曲线与零轴的交点。

如果希望尽快求出根，可以用 Newton 方法。每次先用旧利率算出价格误差，然后除以函数在该位置的斜率，得到新的估计。这里

$$f'(x) = -\frac{40}{(1+x)^2} - \frac{80}{(1+x)^3} - \frac{120}{(1+x)^4}.$$

第一项为什么是 $-40/(1+x)^2$ ？因为对 $(1+x)^{-1}$ 求导得 $-(1+x)^{-2}$ ；第二项对 $(1+x)^{-2}$ 求导，指数 -2 会来到前面；第三项同理。

不省略导数与修正量的 Newton 两轮迭代

从 $x_0 = 0.08$ 开始，已知 $f(x_0) = 3.083879$ ，而

$$\begin{aligned} f'(0.08) &= -\frac{40}{1.08^2} - \frac{80}{1.08^3} - \frac{120}{1.08^4} \\ &\approx -34.2936 - 63.5069 - 88.2032 = -186.0037. \end{aligned}$$

故

$$x_1 = 0.08 - \frac{3.083879}{-186.0037} = 0.0965797.$$

第二轮重新代入，可以得到 $x_2 \approx 0.0970099$ ；继续一次会稳定在

$$IRR \approx 0.0970103 = 9.70103\%.$$

这个计算与债券 YTM、隐含波动率反解是同一回事：未知量出现在非线性定价公式中，先形成“模型值减目标值”，再寻找零点。但不能由此认定所有 IRR 问题都有唯一答案。如果现金流多次变号，例如 $(-100, 230, -132)$ ，对应方程

$$-100 + \frac{230}{1+x} - \frac{132}{(1+x)^2} = 0$$

两边乘 $(1+x)^2$ ，可整理成 $100x^2 - 30x + 2 = 0$ ，所以解为 $x = 10\%$ 和 $x = 20\%$ 。这种情形里，单靠一个 IRR 判断项目优劣会产生歧义，应回到在给定资本成本下的 NPV。

不等间隔现金流

如果第二笔款不是两年末，而是在第 1.5 年收到，则不能沿用 $1/(1+x)^2$ 。在统一口径下，现金流发生在第 t_i 年，其现值便写成 $CF_i/(1+x)^{t_i}$ 。日期、计息基准和有效利率需要一一对应，否则“方程解对了”也未必是金融上正确的 IRR。

3.7 贴现因子是价格，不只是一个分母

教材经常把 $1/(1+r)^T$ 当成需要记住的系数，然而贴现因子本身可以有一个直接的金融解释：今天花多少钱，才能在未来某一日期确定拿到一元钱。记这个价格为 $D(0, T)$ 。如果有一笔在 T 年后确定支付 X_T 元的现金流，那么它今天的价格为

$$P_0 = X_T D(0, T).$$

这是一种证券定价写法，并不要求每个期限都能使用同一个固定利率。只在年复利且固定利率为 r 的约定下，才有 $D(0, T) = (1+r)^{-T}$ ；若用连续复利记收益率，则 $D(0, T) = e^{-rT}$ 。

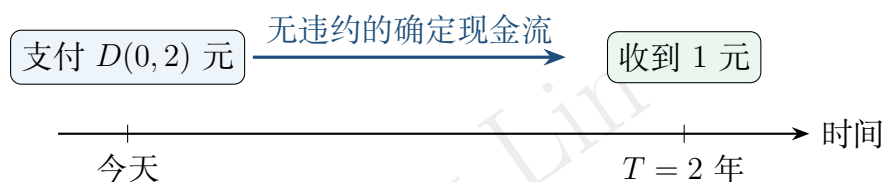


图 3.4: 贴现因子就是零息现金流的单位价格。

具体地，假定两年期连续复利零息收益率为 4%：

$$D(0, 2) = e^{-0.04 \times 2} = e^{-0.08} \approx 0.923116,$$

$$P_0(100 \text{ 元的确定回款}) = 100 \times 0.923116 = 92.3116.$$

反过来，若两年到期支付 100 元的零息债在今天交易于 92.3116 元，则连续复利收益率满足

$$92.3116 = 100e^{-2r}, \quad r = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{92.3116}{100} \right) \approx 4\%.$$

这三个操作——由收益率得贴现因子、由贴现因子得价格、由价格反解收益率——会在债券、远期、互换和衍生品定价中不断重现。

3.8 为什么一个项目可能有两个 IRR

对于先投入、后持续回收的常规项目，NPV 往往随着贴现率上升而下降，因此一般只存在一个经济上有意义的 IRR。但如果现金流多次变号，NPV 可能先下降后上升，甚至存在多个使其为零的贴现率。

考虑现金流 $(-100, 230, -132)$ ，发生在第 0、1、2 年。令 $x = 1 + r$ ，则

$$\begin{aligned}0 &= -100 + \frac{230}{1+r} - \frac{132}{(1+r)^2}, \\0 &= -100x^2 + 230x - 132, \\0 &= 100x^2 - 230x + 132.\end{aligned}$$

用求根公式：

$$x = \frac{230 \pm \sqrt{230^2 - 4 \times 100 \times 132}}{2 \times 100} = \frac{230 \pm 10}{200}.$$

所以 $x = 1.10$ 或 1.20 ，对应 **两个 IRR**：10% 和 20%。直接代回检查：

$$\begin{aligned}NPV(10\%) &= -100 + \frac{230}{1.1} - \frac{132}{1.1^2} = 0, \\NPV(20\%) &= -100 + \frac{230}{1.2} - \frac{132}{1.2^2} = 0.\end{aligned}$$

它不是数值求根器犯错，而是项目先回款、再发生大额支出所造成的真实非单调性。在投资选择中，不能单靠挑较大的 IRR；应使用符合资金机会成本的贴现率比较 NPV，并核实现金流约定是否合理。

Zoey Lin

从价格到贴现因子

先考虑两年以后确定支付 100 元的合约。假设今天它的市场价格为 92 元，则两年零息贴现因子等于 $D(0, 2) = 92/100 = 0.92$ 。这里的 $D(0, 2)$ 表示在两年后领取一元的今天价格。

一笔票息如何决定第二年的贴现因子

假设市场上还给出一年零息贴现因子 $D_1 = 0.96$ ，另一只债券面值 100、每年票息 5 元、两年到期，成交价格为 101.30。两年中的现金流分别是 5 元和 105 元，故

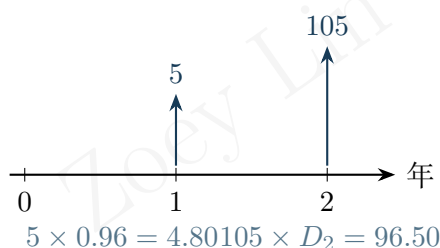
$$101.30 = 5D_1 + 105D_2 = 5(0.96) + 105D_2.$$

逐项移项得到

$$105D_2 = 101.30 - 4.80 = 96.50,$$

$$D_2 = \frac{96.50}{105} = 0.9190476190.$$

这一计算称为收益率曲线的逐期剥离 (bootstrap)。一年期贴现因子先由较短期限的零息工具确定，再利用票息债的价格解出第二年贴现因子。



贴现因子与远期利率

若要从第一年末到第二年末借出一元，令该期间的离散远期利率为 $f_{1,2}$ 。两种获得第二年末一元的方法应具有相同的今天成本，因此

$$D_2 = \frac{D_1}{1 + f_{1,2}}, \quad 1 + f_{1,2} = \frac{D_1}{D_2} = \frac{0.96}{0.9190476190} = 1.0445595855.$$

于是 $f_{1,2} = 4.45595855\%$ 。这是第一年末至第二年末的一年期远期利率，不能误称为从今天开始的两年期即期收益率。

为什么需要正贴现因子

未来确定收到一元的索赔证券，在无套利市场中通常必须具有正价格。若 $D_2 < 0$ ，买入该索赔证券可在今天获得资金、到期又收到一元，形成明显套利。若不同期限贴现因子不单调，则还需要检查是否容许负利率；不能仅凭 $D_2 > D_1$ 就宣布市场必然有套利。

1 现金流与无套利的同一个起点

1.1 贴现因子是一项可交易承诺的价格

设市场承诺一年后支付 1 元，今天只需支付 $D(0, 1)$ 元。假设该承诺没有信用风险，且一年无风险增长因子为 1.05。投资者今天用 $1/1.05$ 元购买无风险账户，到期便能获得 1 元。因此

$$D(0, 1) = \frac{1}{1.05} = 0.95238095. \quad (1.1)$$

读这个式子时，不妨把 $D(0, 1)$ 看成一个商品价格。它买下的是一年后确定收到的一元钱。零息债价格、现金流贴现、远期利率均由这一价格体系出发。

现在考虑两年后确定支付的 100 元，假设每年无风险增长因子都是 1.05。今天投入 $100/1.05^2$ 元，两年后恰好变成 100 元。因此

$$D(0, 2) = \frac{1}{1.05^2} = 0.90702948,$$

$$PV = 100D(0, 2) = 90.702948.$$

若把这笔两年后的 100 元与一年后的 50 元放在一起，今天的价格就是两项价格之和，

$$PV = 50 \times 0.95238095 + 100 \times 0.90702948 = 138.321995.$$

加法在这里来自线性定价。两项支付可以分别购买，再合并持有；同样支付的两组组合不能拥有不同总价，否则会出现买低卖高的机会。

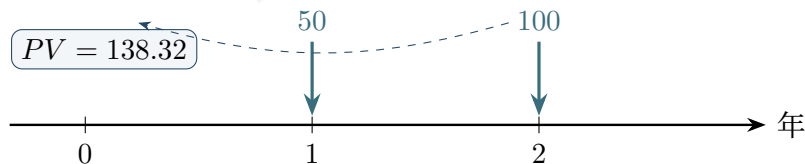


图 1.1: 两笔不同日期的付款先各自贴现，再在今天相加。

1.2 从两个未来状态算出一份期权的价格

考虑今天股价 $S_0 = 100$ ，一年后可能涨至 120，也可能跌至 90。一年无风险增长因子为 1.05。一份执行价 100 的看涨期权到期支付分别为 20 与 0。

设持有 Δ 股股票，另在银行账户投入 B 元。希望这两项投资到期给出与期权完全一致的支付，于是有

$$\begin{cases} 120\Delta + 1.05B = 20, \\ 90\Delta + 1.05B = 0. \end{cases}$$

两式相减消去银行账户，得到 $30\Delta = 20$ ，因此 $\Delta = 2/3$ 。代回第二式，

$$90 \times \frac{2}{3} + 1.05B = 0 \implies B = -\frac{60}{1.05} = -57.142857.$$

负的 B 表示今天从银行借入资金。一股股票和银行头寸的成本是可观察的，所以期权今天的价格必为

$$C_0 = 100 \times \frac{2}{3} - 57.142857 = 9.523810.$$

假如期权市场报价 11 元，交易者可以卖出报价过高的期权，花 9.523810 元复制其到期支付。两种未来状态中，复制资产的支付都恰好抵消期权义务，今天留下约 1.47619 元。这个差额说明报价与无套利条件不相容。

1.3 同一计算可以写成状态价格

令 π_u 与 π_d 分别代表上、下状态支付 1 元的今天价格。银行账户与股票满足

$$\begin{cases} \pi_u + \pi_d = 1/1.05, \\ 120\pi_u + 90\pi_d = 100. \end{cases}$$

由第一式得 $\pi_d = 0.952381 - \pi_u$ 。代入第二式，

$$\begin{aligned} 120\pi_u + 90(0.952381 - \pi_u) &= 100, \\ 30\pi_u &= 14.285714, \\ \pi_u &= 0.476190, \quad \pi_d = 0.476190. \end{aligned}$$

期权的价格马上变成 $20\pi_u + 0\pi_d = 9.523810$ 。两个状态价格都为正，因此此例没有明显的状态套利。将状态价格乘上一年增长因子，得到风险中性权重 $q_u = q_d = 0.5$ 。这里的 0.5 来自复制和定价约束，无须等于人们相信股价上涨的真实频率。

校验时只需做三件事。两项状态价格相加应等于零息贴现因子；用它们定价股票应得到 100；用它们定价期权应与复制成本相同。

现金流与求根中的一个共同问题

考虑今天投入 100 元，随后三年末分别得到 40 元。利率按年复利计，净现值写为

$$F(r) = -100 + \frac{40}{1+r} + \frac{40}{(1+r)^2} + \frac{40}{(1+r)^3}.$$

将 $r = 0.08$ 代入，三笔收入的现值依次为 37.037037、34.293553、31.753290，合计 103.083879。因而 $F(0.08) > 0$ 。取 $r = 0.10$ ，得到 $F(0.10) \approx -0.525920 < 0$ 。连续性保证在这两个利率之间存在一个根。

为什么可以用 Newton 法

先对每一项分别求导，得到

$$F'(r) = -\frac{40}{(1+r)^2} - \frac{80}{(1+r)^3} - \frac{120}{(1+r)^4}.$$

在 $r_0 = 0.08$ 处， $F'(r_0) \approx -186.0037$ 。经过一次切线修正，

$$r_1 = r_0 - \frac{F(r_0)}{F'(r_0)} = 0.08 - \frac{3.083879}{-186.0037} \approx 0.096580.$$

重新求函数值和导数，可得 $r_2 \approx 0.097010$ ；继续迭代得到

$$\boxed{\text{IRR} = 9.7010257\%}.$$

回代检验是最后一步。若以求得的利率折现三笔 40 元收入，其合计应接近 100 元。

唯一性从哪里来

若未来现金流都为正，则在 $r > -1$ 内有 $F'(r) < 0$ ，因此函数严格下降。给定两端符号相反时，根唯一。若现金流多次变号，可能出现多个正的内部收益率，不能将这一结论无条件推广。

同样的求根结构出现在债券到期收益率和期权隐含波动率中。求根之前应先检查输入变量的范围、函数的单调性，以及目标值是否落在模型允许的价格区间。

专题 A

现金流、贴现因子与无套利的共同语言

本章放在复利、净现值和内部收益率之后。对于初学者，一个经常出现的疑问是：为什么债券要折现，期权也要折现，而股票组合又谈无套利？这几件事其实可以从同一个问题开始：未来一笔确定的现金流，今天应该付多少钱？

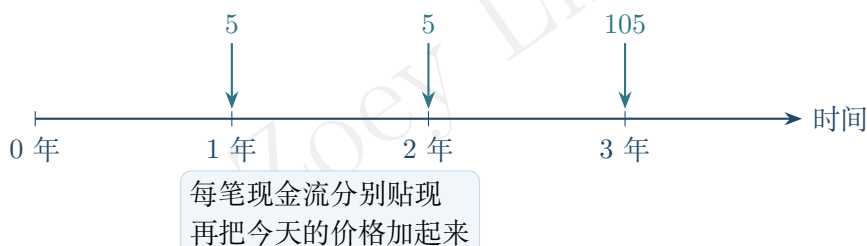
A.1 从现金流出发，而不是从利率符号出发

若一年后确定收到 105 元，而一年期无风险收益率是 5%，则今天 100 元存入无风险账户，一年后恰好增长为 105 元。因此这笔到期现金流的价格必须是 100 元。只要存在能够借贷的无风险账户，价格高于或低于 100 都会允许买便宜、卖贵的套利交易。

记 $D(0, T)$ 为 T 年后支付 1 元的零息证券在今天的价格（贴现因子），则

$$D(0, T) = \frac{1}{(1+r)^T} \quad (\text{年复利}), \quad D(0, T) = e^{-rT} \quad (\text{连续复利}).$$

未来的确定现金流 C_T ，今天价格就是 $C_T D(0, T)$ 。贴现因子本身就是一种证券价格，不只是代数分母。



A.2 把债券定价算成三笔独立交易

三年期债券，面值 100，年票息 5，收益率曲线给出的三年贴现因子分别为 0.96, 0.91, 0.86。注意这里不是假设一个统一的收益率，而是已知每个到期日的零息价格。

$$\begin{aligned} P &= 5D(0, 1) + 5D(0, 2) + 105D(0, 3) \\ &= 5 \times 0.96 + 5 \times 0.91 + 105 \times 0.86 \\ &= 4.80 + 4.55 + 90.30 = \boxed{99.65}. \end{aligned}$$

一张票息债实际上等价于多张不同到期日的零息债。价格可加性，正是它们可以逐笔定价的原因。

A.3 将无套利写成线性方程

假设仅有两个未来状态，上涨状态与下跌状态。资产 A 未来分别支付 120, 80 元，资产 B 未来分别支付 50, 50 元。若现在价格分别为 100, 48 元，我们想复制一笔未来在两种状态下都支付 100 元的合约。设持有 x 份 A 、 y 份 B ：

$$\begin{pmatrix} 120 & 50 \\ 80 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

上下两式相减得到 $40x = 0$ ，所以 $x = 0$ ；再由 $50y = 100$ 得 $y = 2$ 。复制成本为 $0 \times 100 + 2 \times 48 = 96$ 。该合约若报价不是 96 元，就与复制它的组合出现价差。

同一思想的两个方向。 已知未来现金流时，利用无套利求今天的价格；已知今天的价格时，也可以倒过来求隐含贴现因子或状态价格。后面的风险中性定价仍然在做这件事，只不过状态数和时间步数变多。

A.4 二维状态价格：概率和贴现为什么会同时出现

设两种未来状态下的单位状态索赔证券（Arrow 证券）价格分别为 π_u, π_d 。该证券只在对应状态支付 1 元。任何未来 payoff (X_u, X_d) 的价格都是

$$V_0 = \pi_u X_u + \pi_d X_d.$$

如果一年期无风险贴现因子为 $D = 1/1.05 = 0.952381$ ，且风险中性上涨概率为 $q = 0.6$ ，则 $\pi_u = Dq = 0.571429$ ， $\pi_d = D(1 - q) = 0.380952$ 。对于 $(20, 0)$ 的 payoff:

$$V_0 = 20 \times 0.571429 + 0 \times 0.380952 = 11.42858.$$

等价地， $V_0 = D[0.6 \times 20 + 0.4 \times 0]$ 。风险中性概率不是替代贴现；它是和贴现因子一起进入状态价格的。

Zoey Lin

第二部分

概率与统计地基

Zoey Lin

第 4 章

随机变量、期望与方差：先从离散例子算明白

随机变量不是“随机的字母”

随机变量与分布

随机变量用来表示尚未确定的结果。给定一个概率模型后，每个可能的取值都有相应权重。期望是这些结果的概率加权平均，方差则衡量结果围绕均值的离散程度。

把期望拆成“每个结果贡献多少”

若上涨赚 10 的概率是 0.6，下跌亏 5 的概率是 0.4：

上涨这条分支对平均值的贡献 $= 10 \times 0.6 = 6$ ；

下跌这条分支贡献 $= (-5) \times 0.4 = -2$ ；

相加得到 $E[X] = 4$ 。

你可以把期望理解为：每条可能结果先乘上它出现的权重，再全部加起来。

为什么方差要平方

若只直接平均离差，正负会抵消：高于均值 +5 和低于均值 -5 会加成 0。平方后两者都变成 25，所以能够衡量“离均值有多远”。

4.1 期望就是加权平均

例题

设随机变量 X 取值 $-10, 0, 20$ ，概率分别为 $0.2, 0.5, 0.3$ 。

$$E[X] = (-10) \times 0.2 + 0 \times 0.5 + 20 \times 0.3 = 4.$$

这说明长期平均来看，每次博弈的平均收益是 4。

4.2 方差就是围绕均值的波动

例题

均值已经算出是 4，于是

$$\text{Var}(X) = E[(X - 4)^2].$$

逐项：

$$(-10 - 4)^2 \times 0.2 = 196 \times 0.2 = 39.2,$$

$$(0 - 4)^2 \times 0.5 = 16 \times 0.5 = 8,$$

$$(20 - 4)^2 \times 0.3 = 256 \times 0.3 = 76.8.$$

所以

$$\text{Var}(X) = 39.2 + 8 + 76.8 = 124, \quad \sigma = \sqrt{124} \approx 11.14.$$

4.3 先看横轴：Z 就是“向右走了几个标准差”

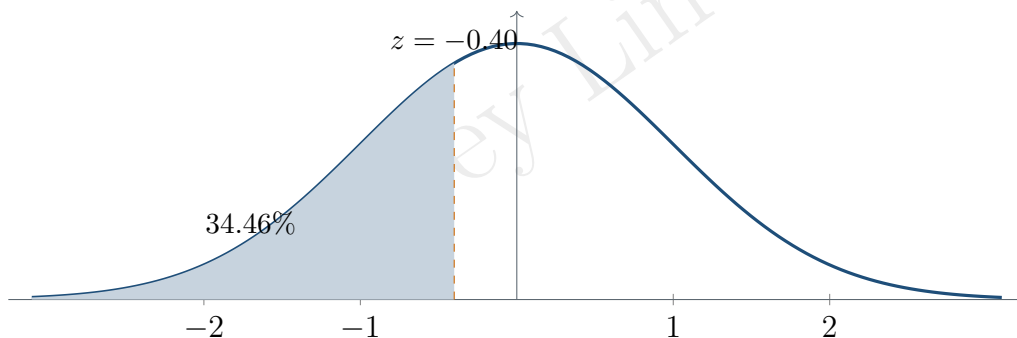


图4.1 观测值 $R=0$ 位于均值左侧 0.4 个标准差处。

比较三种问题：均值左边、右边与中间

仍设 $R \sim N(0.08, 0.20^2)$ 。这句里的 0.08 是**均值**，0.20 是**标准差**。

1. **亏损**： $P(R < 0)$ 。先算 $z = (0 - 0.08)/0.20 = -0.4$ ；再查 $\Phi(-0.4) = 0.3446$ 。
2. **收益至少 28%**： $P(R > 0.28)$ 。先算 $z = (0.28 - 0.08)/0.20 = 1$ ；查 $\Phi(1) = 0.8413$ ；因此右尾 $= 1 - 0.8413 = 0.1587$ 。
3. **收益介于 -12% 和 28%**：左端 $z = (-0.12 - 0.08)/0.20 = -1$ ，右端 $z = 1$ ；故 $0.8413 - 0.1587 = 0.6826$ 。

结果核对

三类题的答案分别对应**左侧面积**、**右侧面积**、**两点之间面积**。先用手指在钟形曲线上指出要求哪块面积，再动公式，就很难把 Φ 与 $1 - \Phi$ 用反。

Zoey Lin

第 5 章

正态分布与标准化：很多题最后都在算一个 Z

标准化其实是在问“离均值几个标准差”

标准化后的刻度

标准化把原始观测值转换为以标准差计量的离均距离。 $Z = (X - \mu)/\sigma$ ，因而 $Z=2$ 表示高于均值两个标准差， $Z = -0.5$ 表示低于均值半个标准差。变换后的量没有原来的计量单位。

再做一个没有百分号的例子

考试成绩平均 70，标准差 10。某人考 85 分：

$$Z = \frac{85 - 70}{10} = 1.5.$$

这句话翻译成人话就是：他比平均分高 1.5 个标准差。金融里的收益率标准化完全是同一个动作。

常见误算

标准化最常见的错误是分子写反。记住：**实际值减均值**，不是均值减实际值。

5.1 标准化模板

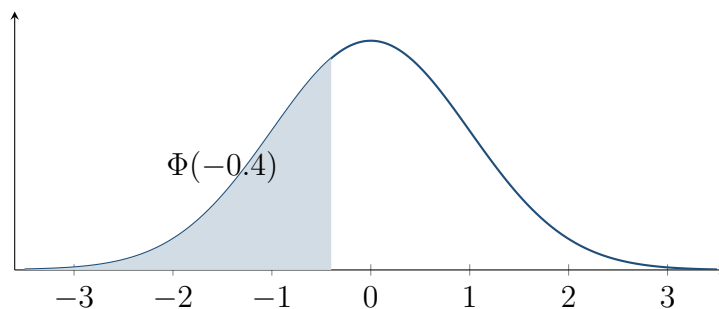


图5.1 正态分布标准化后的概率区域。

例题

若年收益 $R \sim N(8\%, 20\%^2)$ ，求亏损概率 $P(R < 0)$ 。

先标准化：

$$z = \frac{0 - 0.08}{0.20} = -0.4.$$

因此 $P(R < 0) = \Phi(-0.4)$ 。

查表 $\Phi(0.4) = 0.6554$ ，所以

$$\Phi(-0.4) = 1 - 0.6554 = 0.3446.$$

结果核对

如果均值是 8%，而我们问“是否亏损”，亏损点位于均值左边 0.4 个标准差，因此概率应当略小于 50%。34.46% 很合理。

5.2 为什么“标准化”这么有用

说明

原来的收益率可能用百分数、价格可能用元、身高可能用厘米，它们的单位完全不同。标准化把所有问题都翻译成一句统一的话：“**这个点离均值多少个标准差？**”一旦翻译完成，所有正态题都能共用同一张标准正态表。

变式

若 $X \sim N(50, 10^2)$ ，求 $P(X > 65)$ 。第一步永远是

$$z = \frac{65 - 50}{10} = 1.5.$$

于是原问题变成 $P(Z > 1.5) = 1 - \Phi(1.5)$ 。查表 $\Phi(1.5) = 0.9332$ ，所以答案 = 0.0668。

第 6 章

条件期望与 Bayes：从信息树开始，不要先上抽象符号

条件期望就是“信息更新以后重新平均”

已知信息与条件均值

条件期望依赖已经获得的信息。观察结果能够改变未来各状态的条件概率；用更新后的概率对结果加权，便得到条件均值。信息集变化时，条件期望也可能随之变化。

为什么树模型特别适合学条件期望

一棵树的每个节点，都代表“我现在知道的信息”。从某个节点往下，只剩未来仍可能发生的分支。你在这个节点做加权平均，就是条件期望。再把这些节点值往上一层折，就是塔式法则。

相关知识

以后美式期权、Bellman 方程、LSM 回归，本质上都在重复“知道当前状态后，对未来继续价值重新平均”。

6.1 条件期望的树图

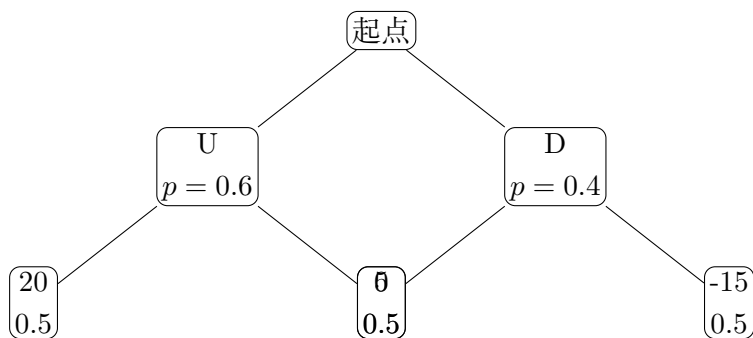


图6.1 条件均值先按分支计算，再按节点概率汇总。

例题

在 U 节点: $E[X | U] = 0.5 \times 20 + 0.5 \times 0 = 10$ 。

在 D 节点: $E[X | D] = 0.5 \times 5 + 0.5 \times (-15) = -5$ 。

回到起点:

$$E[X] = 0.6 \times 10 + 0.4 \times (-5) = 4.$$

6.2 贝叶斯公式的频数解释

例题

某病患病率 1%，检测灵敏度 95%，特异度 90%。求“检测阳性时真的患病”的概率。

想象 10000 人：患病 100 人，未患病 9900 人。

患病者中，95% 检出阳性，所以真阳性 = 95。

未患病者中，10% 误报阳性，所以假阳性 = 990。

总阳性人数 = 95 + 990 = 1085。

因此

$$P(\text{病} | \text{阳性}) = \frac{95}{1085} \approx 8.76\%.$$

常见误算

很多人会误以为是 95%。实际上，当基础患病率很低时，假阳性可以远多于真阳性。

6.3 把 Bayes 画成 “信息过滤器”

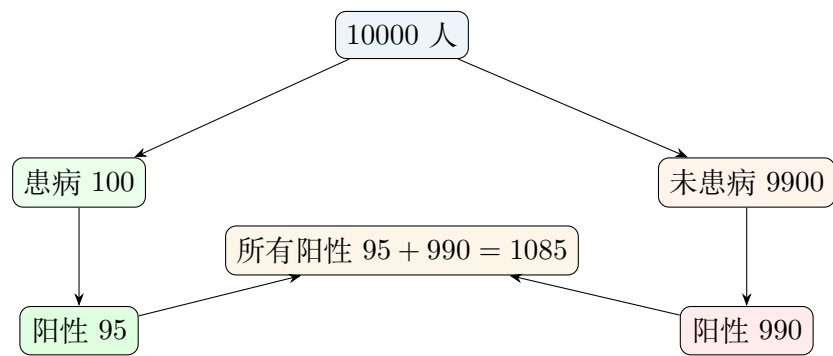


图6.2 贝叶斯更新中的类别划分和阳性筛选。

6.4 把协方差表画成四个象限：谁在一起涨跌？

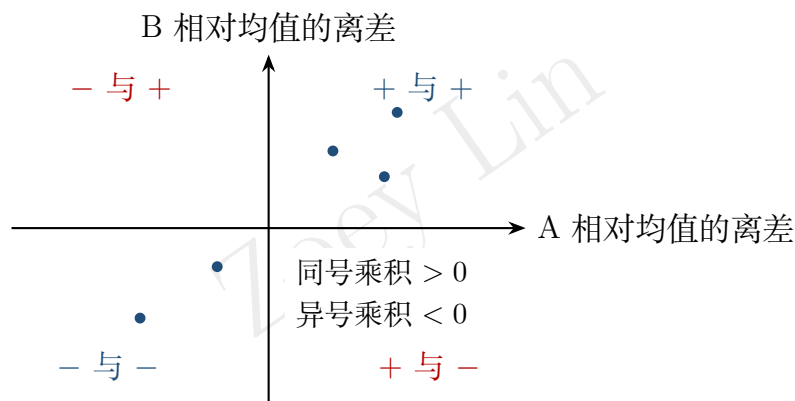


图 6.3: 协方差的每一项是两列 “离差” 的乘积，符号表示是否同向偏离。

样本协方差的五行乘法账本

原始收益单位暂时用百分点，不急着变成小数：

天数	1	2	3	4	5
A 离差	0	-2	1	-1	2
B 离差	1	-1	0	-2	2
逐日乘积	0	2	0	2	4

$$s_{AB} = \frac{0 + 2 + 0 + 2 + 4}{5 - 1} = 2 \text{ 百分点}^2.$$

如果换成以 1 为单位的小数收益，则每个离差都要除 100，所以协方差变成

$$s_{AB} = 2 \times (0.01)^2 = 0.0002.$$

常见误算

协方差有单位，相关系数没有单位。把 2（百分点平方）直接代进小数收益的协方差矩阵，会比正确答案大 10^4 倍。

6.5 全方差公式为什么多出一项

某产品第一天可能进入“需求旺盛”或“需求平稳”两个状态，各有 50% 的概率。在旺盛状态下，第二天销售额为 8 或 12，概率各半；在平稳状态下，销售额为 2 或 6，也各半。

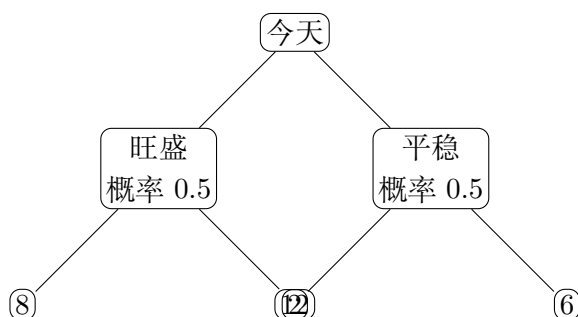


图6.4 四状态概率树与第一层已知信息。

条件均值是 $E[X | \text{旺盛}] = (8 + 12)/2 = 10$ ， $E[X | \text{平稳}] = (2 + 6)/2 = 4$ ；在两种状态内，方差都是

$$\frac{1}{2}(8 - 10)^2 + \frac{1}{2}(12 - 10)^2 = 4,$$

另一个状态也同为 4。全局均值为 $(10 + 4)/2 = 7$ 。因此全局方差可以拆成两部分：

$$E[\text{Var}(X | Y)] = 0.5 \times 4 + 0.5 \times 4 = 4,$$

$$\text{Var}(E[X | Y]) = 0.5(10 - 7)^2 + 0.5(4 - 7)^2 = 9.$$

所以 $\text{Var}(X) = 4 + 9 = 13$ 。直接从四个结果验证：

$$\frac{1}{4}[(8 - 7)^2 + (12 - 7)^2 + (2 - 7)^2 + (6 - 7)^2] = \frac{1}{4}(1 + 25 + 25 + 1) = 13.$$

第一项描述同一种市场状态内部的随机起伏；第二项描述市场状态之间的水平差异。金融风险的许多分解恰恰就是这个思路。

6.6 从相关系数看散点图中的方向

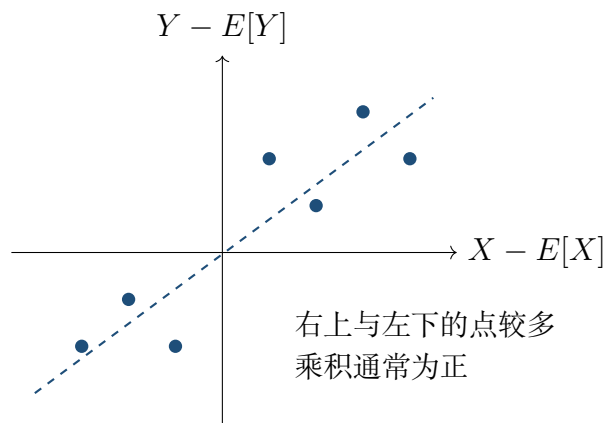


图 6.5: 协方差把“同时偏高、同时偏低”转写成离差乘积。

注意这里横纵轴画的不是原始收益率，而是减去各自均值之后的离差。对每一个点，横坐标乘纵坐标。右上和左下为正，左上和右下为负；把所有乘积平均，便得到协方差。这个几何解释比直接背诵公式更可靠。

6.7 观察信息后的条件期望

假设明天市场先出现“好消息”或“坏消息”，概率分别为 0.6 和 0.4。好消息出现后，一笔资产的最终收益可能为 20 或 0，二者条件概率均为 0.5；坏消息之后，则可能是 5 或 -15，条件概率也各为 0.5。

如果我们今天站在树根，对四条完整路径逐个加权，得到

$$E[X] = 0.3(20) + 0.3(0) + 0.2(5) + 0.2(-15) = 4.$$

若时间推进到第一期，坏消息已经揭晓，条件期望就发生了变化：好消息节点下的预期收益为 10，坏消息节点下为 -5。到这一刻，条件期望本身变成取值为 10 或 -5 的随机变量。

这便是 $E[X | \mathcal{F}_1]$ 的含义。符号 $\mathcal{F}_1$ 不是某个特定事件，也不是一个普通数字，它代表到时刻 1 为止已获得的全部信息；不同信息状态下，这个条件期望可以取不同值。

全方差公式从数字里出现

先分别计算两个消息节点内的方差：

$$\text{Var}(X | U) = \frac{1}{2}(20 - 10)^2 + \frac{1}{2}(0 - 10)^2 = 100,$$

$$\text{Var}(X | D) = \frac{1}{2}(5 + 5)^2 + \frac{1}{2}(-15 + 5)^2 = 100.$$

这些是“已经知道消息后仍然存在的风险”。它们的平均值为

$$E[\text{Var}(X | \mathcal{F}_1)] = 0.6(100) + 0.4(100) = 100.$$

消息节点之间的预期收益也不同，因此还有另一部分风险：

$$\begin{aligned}\text{Var}(E[X | \mathcal{F}_1]) &= 0.6(10 - 4)^2 + 0.4(-5 - 4)^2 \\ &= 0.6(36) + 0.4(81) = 54.\end{aligned}$$

两部分相加：

$$\boxed{\text{Var}(X) = 100 + 54 = 154.}$$

也可以直接使用四条终点路径核验：

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= 0.3(20 - 4)^2 + 0.3(0 - 4)^2 \\ &\quad + 0.2(5 - 4)^2 + 0.2(-15 - 4)^2 \\ &= 76.8 + 4.8 + 0.2 + 72.2 = 154.\end{aligned}$$

这就是全方差公式

$$\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X | \mathcal{F}_1)] + \text{Var}(E[X | \mathcal{F}_1]).$$

它可以理解为：总风险由“消息揭晓后仍剩下的风险”和“不同消息使预测本身摇摆的风险”组成。这一分解在分层风险模型、条件波动率和贝叶斯预测中都会出现。

6.8 独立、不相关、条件独立并非同一个概念

若两个变量独立，知道其中一个不会改变另一个的分布；而“相关系数为零”只表示线性协方差为零，不表示没有更复杂的依赖。举一个极简例子：取 X 以各 $1/3$ 的概率取 $-1, 0, 1$ ，令 $Y = X^2$ 。显然 Y 完全由 X 决定，二者并不独立。但

$$E[X] = 0, \quad E[XY] = E[X^3] = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Cov}(X, Y) = 0.$$

实际建模时，“零相关”不能被当作“没有共同风险”。

6.9 全方差公式：风险究竟来自哪里

同一个未来收益，今天知道的信息不同，衡量风险的方式也会不同。全方差公式把这种差别拆成两部分：一部分是每个已知情形内部仍然不确定的波动，另一部分是不同情形的条件均值彼此不同。

$$\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X | Y)] + \text{Var}(E[X | Y]).$$

这条式子可以从恒等式直接推出来。令 $m = E[X]$ 、 $m_Y = E[X | Y]$ ，那么

$$X - m = (X - m_Y) + (m_Y - m).$$

平方、展开，得到

$$(X - m)^2 = (X - m_Y)^2 + 2(X - m_Y)(m_Y - m) + (m_Y - m)^2.$$

以 Y 为条件取期望时，中间的交叉项消失，因为 $E[X - m_Y | Y] = 0$ 。再对 Y 的可能状态取期望，便得到全方差公式。

回到前面条件期望树中的四种结果。第一期上行概率是 0.6，下行是 0.4；上行后 X 等概率取 20, 0，下行后等概率取 5, -15。先计算条件均值与条件方差：

信息状态	$E[X Y]$	$\text{Var}(X Y)$
U	$(20 + 0)/2 = 10$	$[(20 - 10)^2 + (0 - 10)^2]/2 = 100$
D	$(5 - 15)/2 = -5$	$[(5 + 5)^2 + (-15 + 5)^2]/2 = 100$

这里 $E[X] = 0.6 \times 10 + 0.4 \times (-5) = 4$ 。

$$E[\text{Var}(X | Y)] = 0.6 \times 100 + 0.4 \times 100 = 100,$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(E[X | Y]) &= 0.6(10 - 4)^2 + 0.4(-5 - 4)^2 \\ &= 0.6 \times 36 + 0.4 \times 81 = 54. \end{aligned}$$

所以总方差为 $100 + 54 = 154$ 。直接从四条路径核验也相同：

$$E[X^2] = 0.3 \times 400 + 0.3 \times 0 + 0.2 \times 25 + 0.2 \times 225 = 170,$$

于是 $\text{Var}(X) = 170 - 4^2 = 154$ 。

总方差 154 的分解

状态内部风险：100	均值差异：54
------------	---------

图6.6 总方差中的组内波动与组间均值差异。

值得注意的是， $E[X | Y]$ 自身也是一个随机变量；它并不是“所有情况下都等于一个固定数”。这也是条件期望能连接资产定价、信息更新与回归分析的原因。

第 7 章

协方差、相关系数与线性回归

协方差看的是“两个人是不是一起偏离均值”

离差的共同变化

协方差来自两项收益各自偏离均值的乘积。当两项收益同向偏离均值时，乘积为正；偏离方向相反时，乘积为负。把这些乘积取平均，就得到共同波动的量化描述。

相关系数为什么还要除标准差

协方差有单位，而且受波动率大小影响。为了把它压到 $[-1, 1]$ ，我们除以两边标准差：

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

所以相关系数可以理解成“去掉各自波动大小之后，纯粹看同步程度”。

Beta 是什么

回归 $R_i = \alpha + \beta R_M + \varepsilon$ 中， β 可以看成：市场每动 1 个单位，这只资产平均动多少。 $\beta = 1.8$ 意味着市场上涨 1% 时，模型预计这只资产大约上涨 1.8%（忽略截距和残差）。

7.1 从 5 天原始数据手算协方差

例题

A 五日收益 (%)：1, -1, 2, 0, 3；B：2, 0, 1, -1, 3。

均值都等于 1%。

离差 A：0, -2, 1, -1, 2；离差 B：1, -1, 0, -2, 2。

乘积：0, 2, 0, 2, 4，总和 = 8。

样本协方差（百分点平方）

$$s_{AB} = \frac{8}{5-1} = 2.$$

样本方差都为 2.5，所以相关系数

$$\rho = \frac{2}{\sqrt{2.5 \times 2.5}} = 0.8.$$

7.2 OLS/Beta 的 4 点例子

例题

市场收益 $M = (1, 2, -1, 0)$ ，股票收益 $R = (2, 3, -2, -1)$ （单位都是%）。

$$\beta = \frac{\text{Cov}(R, M)}{\text{Var}(M)}.$$

均值分别为 0.5 与 0.5。离差 $M = (0.5, 1.5, -1.5, -0.5)$ ， $R = (1.5, 2.5, -2.5, -1.5)$ 。

乘积和 = $0.75 + 3.75 + 3.75 + 0.75 = 9$ ，样本协方差 = $9/3 = 3$ 。市场样本方差 = $(0.25 + 2.25 + 2.25 + 0.25)/3 = 5/3$ 。所以

$$\beta = \frac{3}{5/3} = 1.8.$$

7.3 散点图里怎么看相关性

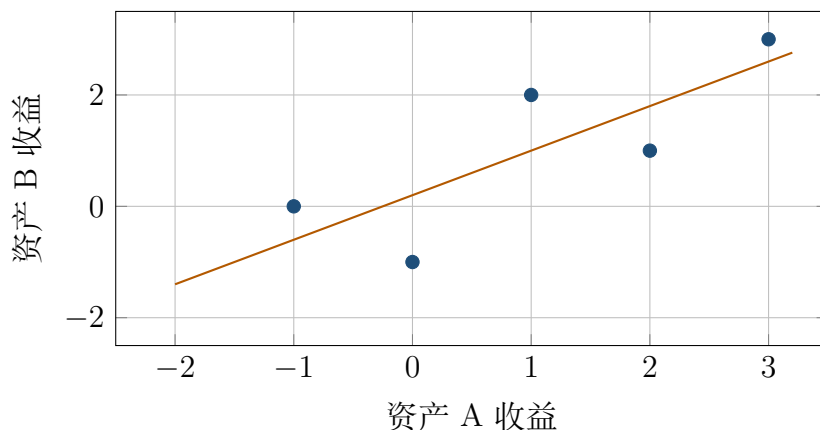


图 7.1: 点云整体向右上倾斜, 意味着正相关; 相关系数越接近 1, 点越贴近一条上升直线。

说明

协方差有单位, 所以大小不容易直接比较; 相关系数把它除以两边标准差以后, 压进 $[-1, 1]$, 因此更适合比较不同资产对之间的“同涨同跌程度”。

7.4 标准差为什么按 $\sqrt{T}$ 缩放: 从方差可加性推出来

财经报道常说“日波动率乘上 $\sqrt{252}$ 就是年化波动率”。这个换算不是一个天然定律, 它依赖时间序列的假设。只有弄清楚条件, 才知道什么时候可以使用。

设每日对数收益率为 $r_1, r_2, \dots, r_n$, n 日累计对数收益率是 $R_n = r_1 + \dots + r_n$ 。由方差的求和法则,

$$\text{Var}(R_n) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(r_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(r_i, r_j).$$

如果每天的方差相同, 都为 σ_d^2 , 并且不同日期收益率不相关, 则协方差项为 0, 结果简化为

$$\text{Var}(R_n) = n\sigma_d^2, \quad \text{SD}(R_n) = \sigma_d\sqrt{n}.$$

由于金融中一年常用大约 252 个交易日, 便得到 $\sigma_{\text{annual}} \approx \sigma_d\sqrt{252}$ 。

数字推一遍，然后检查条件

若日收益率标准差为 $1.2\% = 0.012$ ，在不相关、同方差假设下，年化波动率估计为

$$0.012\sqrt{252} \approx 0.012 \times 15.8745 \approx 0.19049 = 19.05\%.$$

若每天平均对数收益率是 $0.02\% = 0.0002$ ，一年累计期望则是

$$252 \times 0.0002 = 0.0504 = 5.04\%.$$

均值随 T 线性累加，标准差随 $\sqrt{T}$ 增长；混淆这两种缩放方式是常见错误。

如果收益率有自相关，前面的协方差项不能消失；若波动率聚集明显，每天的条件方差也不相同。这时机械乘上 $\sqrt{252}$ 只能视为粗略口径，不宜作为对未来风险的确定性预测。

Zoey Lin

专题 B

条件期望、方差分解与信息的价格

这里的中心问题是：在不知道未来结果的情况下，已知更多信息究竟会改变什么？条件期望刻画的是给定信息后的平均结果，而条件方差刻画的是剩下多少不确定性。

B.1 先算四条路径，再写抽象记号

某证券到期支付由宏观环境和公司业绩两部分共同决定。记好环境为 G 、差环境为 B ，其概率分别为 0.6, 0.4；在好环境下达标概率 0.75，在差环境下达标概率 0.25。给定的 payoff 如表。

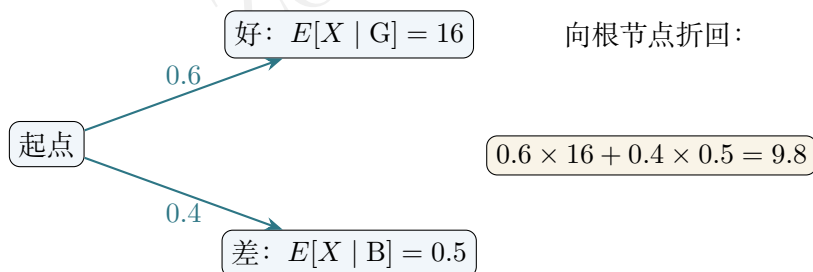
路径	联合概率	payoff	对期望的贡献
好、达标	$0.6 \times 0.75 = 0.45$	20	9.0
好、未达标	$0.6 \times 0.25 = 0.15$	4	0.6
差、达标	$0.4 \times 0.25 = 0.10$	8	0.8
差、未达标	$0.4 \times 0.75 = 0.30$	-2	-0.6
合计	1.00		9.8

先只告诉你环境好还是差，此时条件均值是

$$E[X | E = G] = 0.75 \times 20 + 0.25 \times 4 = 16,$$

$$E[X | E = B] = 0.25 \times 8 + 0.75 \times (-2) = 0.5.$$

再在环境层平均： $0.6 \times 16 + 0.4 \times 0.5 = 9.8$ 。这就是塔式法则的一次数字检验。



B.2 为什么全方差公式有两项

全方差公式

$$\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X | E)] + \text{Var}(E[X | E])$$

最初看起来像凭空多出一项。可以从恒等式拆开：

$$X - E[X] = \underbrace{X - E[X | E]}_{\text{组内偏差}} + \underbrace{E[X | E] - E[X]}_{\text{组间偏差}}.$$

平方后有三个部分。交叉项的条件期望为零，因为 $E[X - E[X | E] | E] = 0$ 。只剩两个平方项，于是得到全方差公式。

B.3 四路径例子的全方差，每个数都算出来

好环境下方差为

$$\begin{aligned}\text{Var}(X | G) &= 0.75(20 - 16)^2 + 0.25(4 - 16)^2 \\ &= 0.75 \times 16 + 0.25 \times 144 = 12 + 36 = 48.\end{aligned}$$

差环境下:

$$\begin{aligned}\text{Var}(X | B) &= 0.25(8 - 0.5)^2 + 0.75(-2 - 0.5)^2 \\ &= 0.25 \times 56.25 + 0.75 \times 6.25 = 18.75.\end{aligned}$$

所以组内平均方差 $= 0.6 \times 48 + 0.4 \times 18.75 = 36.3$ 。组间方差为

$$0.6(16 - 9.8)^2 + 0.4(0.5 - 9.8)^2 = 0.6 \times 38.44 + 0.4 \times 86.49 = 57.66.$$

合计 $36.3 + 57.66 = \boxed{93.96}$ 。从四条路径直接算 $E[X^2] - E[X]^2$:

$$E[X^2] = 0.45 \times 400 + 0.15 \times 16 + 0.10 \times 64 + 0.30 \times 4 = 190,$$

$190 - 9.8^2 = 190 - 96.04 = 93.96$ 。两种算法完全一致。

B.4 这与风险管理的关系

观察总方差 93.96，其中 36.3 来自同一经济环境内部的结果差异，57.66 来自环境之间的均值差异。提高公司内部信息的质量可能减少第一项；对宏观环境做更好的判断会作用于第二项。这不是对所有风险的万能划分，但它给出了信息如何减少不确定性的准确语言。

试一试。如果我们已经知道环境为好，最优均方预测不再是 9.8，而是 16。注意这并不意味着 payoff 确定为 16——剩余条件方差仍为 48。

2 条件期望与全方差的数字含义

2.1 信息增加后，平均值发生了什么变化

假设明年经济只有好、差两种环境，概率分别为 0.6、0.4。处于好环境时，某策略的收益以相同概率取 20 或 0；处于差环境时，则取 5 或 -15。

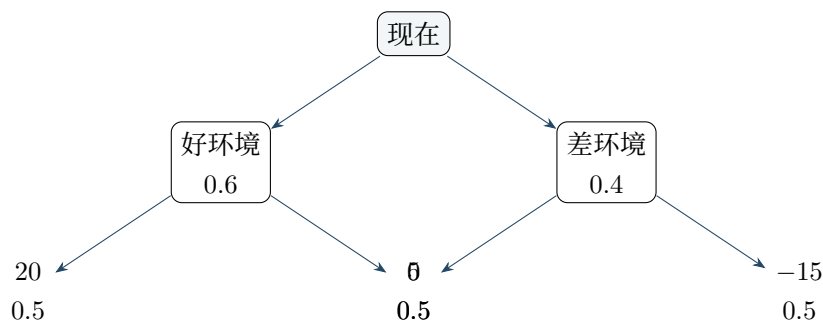


图 2.1: 计算顺序先从叶子走到环境节点，最后走到根节点。

知道环境好时，策略的平均收益为 $m_H = (20 + 0)/2 = 10$ ；知道环境差时为 $m_L = (5 - 15)/2 = -5$ 。今天还不知道环境，故

$$E[X] = 0.6 \times 10 + 0.4 \times (-5) = 4.$$

也可以直接给四条终点路径赋概率。它们的概率依次为 0.3, 0.3, 0.2, 0.2。直接求和便有

$$E[X] = 0.3 \times 20 + 0.3 \times 0 + 0.2 \times 5 + 0.2 \times (-15) = 4.$$

两种做法相等，正是塔式法则的一个四状态实例。

2.2 风险被分成环境内部和环境之间的两部分

今天不掌握环境信息时，收益均值为 4。四条路径的离均值平方分别为 256, 16, 1, 361。依次乘以路径概率，

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= 0.3(256) + 0.3(16) + 0.2(1) + 0.2(361) \\ &= 76.8 + 4.8 + 0.2 + 72.2 = 154. \end{aligned}$$

知道环境后还剩多少风险，可以在环境节点内分别求方差。好环境下，20 和 0 围绕均值 10 波动，

$$\text{Var}(X | H) = \frac{1}{2}(20 - 10)^2 + \frac{1}{2}(0 - 10)^2 = 100.$$

差环境下，5 和 -15 围绕 -5 波动，方差同样为 100。两种条件方差取加权平均得 100。

还有一部分风险来自环境均值本身的不确定性。环境均值可能是 10 或 -5，它们围绕总体均值 4 变动，

$$\text{Var}(E[X | \mathcal{G}]) = 0.6(10 - 4)^2 + 0.4(-5 - 4)^2 = 21.6 + 32.4 = 54.$$

于是 $154 = 100 + 54$ 。左边是总风险，右边依次是环境内部风险与环境间风险。这项恒等式即全方差公式，

$$\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X | \mathcal{G})] + \text{Var}(E[X | \mathcal{G}]). \quad (2.1)$$

2.3 从代数上检查全方差公式

记 $M = E[X | \mathcal{G}]$ 、 $\mu = E[X]$ 。把偏离总体均值的差分成两段，

$$X - \mu = (X - M) + (M - \mu).$$

平方后出现三项。交叉项的条件期望为

$$E[(X - M)(M - \mu) | \mathcal{G}] = (M - \mu)E[X - M | \mathcal{G}] = 0.$$

这里最后一步使用 $E[X - M | \mathcal{G}] = 0$ 。对剩下的两项取期望，便得到式 (2.1)。证明只用了平方展开、条件期望的线性性以及当前已知量可以从条件期望中提出去。

2.4 条件均值为什么是最好的平方误差预测

假设今天只知道经济环境。你希望预测实际收益 X ，预测值只能由环境决定，可以在好环境报 a_H ，在差环境报 a_L 。以好环境为例，预测误差的条件平方平均为

$$L_H(a) = \frac{1}{2}(20 - a)^2 + \frac{1}{2}(0 - a)^2.$$

对 a 求导， $L'_H(a) = -(20 - a) - (0 - a) = 2a - 20$ 。令导数等于零，得到 $a_H = 10$ ；再求二阶导数， $L''_H(a) = 2 > 0$ ，确认它是最小值。差环境同样得到 $a_L = -5$ 。

一般地，设 g 是任何只依赖当前信息 $\mathcal{G}$ 的预测值，则

$$X - g = (X - M) + (M - g), \quad M = E[X | \mathcal{G}].$$

平方后取期望，交叉项为零，因此

$$E[(X - g)^2] = E[(X - M)^2] + E[(M - g)^2].$$

右边第二项非负。选择 $g = M$ 时，它恰好取零。条件期望于是具有精确的最小平方误差意义，并非凭借经验称为“合理预测”。金融定价中的条件期望与预测问题虽然处于不同测度之下，数学上的投影结构仍然相同。

概率树还可检验信息的价值。未观察环境时，固定预测 4 的最小均方误差为 154；观察环境后，使用 10 或 -5，剩余均方误差为 100。信息减少的平方预测误差等于 54。

样本方差、条件方差与概率分位数

设股票日收益（以百分数为单位）有十个观察值：

$$-2.0, -1.2, -0.8, -0.3, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.9, 1.1.$$

样本均值为 $\bar{r} = -0.1\%$ 。求方差时须先说明是以 n 还是 $n - 1$ 为分母；如果这些观察值被用来估计未知的总体波动率，常见的无偏样本方差采用 $n - 1$ 。

$$s^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (r_i - \bar{r})^2, \quad s = 0.9809293\%.$$

因此，使用同一数据样本时，不能随意将 s 写成 0.95%，除非明确说明它来自另一种估计方法或不同的数据窗口。

经验分位数为什么会有不同答案

令损失 $L = -VR$ ，将十个损失从小到大排列，90% 分位数在最近秩定义下是第 9 个，等于组合价值的 1.2%。于是市值 1000 万元的 90% 经验 VaR 为 12 万元。如果软件采用相邻次序统计量的线性插值（常见的 Type 7），收益的第 10% 分位数为

$$-2.0 + 0.9(-1.2 + 2.0) = -1.28\%,$$

对应 VaR 为 12.8 万元。两种答案来源于预先声明的不同样本分位数定义。

同一数据上的正态模型

使用 $\bar{r} = -0.1\%$ 和 $s = 0.9809293\%$ ，并取标准正态左尾 10% 分位 $z_{0.1} = -1.281552$ ，模型预测的收益分位数为

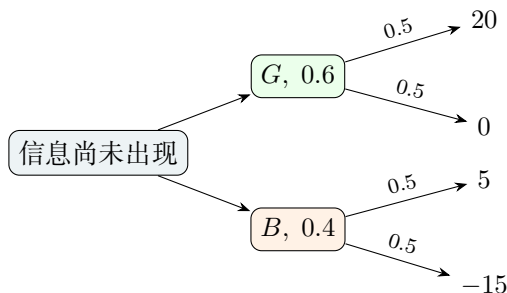
$$q_{0.1} = \bar{r} + z_{0.1}s = -0.1\% - 1.281552(0.9809293\%) \approx -1.35711\%.$$

因此参数法 90% 单日 VaR 约为 135711 元。该答案来自正态分布假设，和历史经验分位数的含义不同。

仅十个观察值不足以稳健地估计 1% 尾部风险。报告历史 VaR 时，应写明样本量、收益窗口、分位数算法和缺失值处理方式；报告参数法 VaR 时，还应注明均值、方差与分布假设。

条件期望与方差的分解

假设某资产在两个经济环境下有四种可能的收益。好环境 G 的概率为 0.6，该环境内收益 X 取 20 或 0，概率各为一半。差环境 B 的概率为 0.4，收益取 5 或 -15，概率亦各为一半。



先在各个环境内求平均

$$E[X | G] = \frac{1}{2}(20) + \frac{1}{2}(0) = 10, \quad E[X | B] = \frac{1}{2}(5) + \frac{1}{2}(-15) = -5.$$

全概率加权后， $E[X] = 0.6(10) + 0.4(-5) = 4$ 。四种末端结果的无条件概率为 0.3, 0.3, 0.2, 0.2；直接算 $0.3(20) + 0.3(0) + 0.2(5) + 0.2(-15) = 4$ ，得到相同答案。

把总风险分成两部分

在好环境内，两种结果相对均值 10 的偏差为 10, -10，因此 $\text{Var}(X | G) = 100$ 。在差环境内，均值为 -5，偏差也为 10, -10，所以 $\text{Var}(X | B) = 100$ 。环境内部的平均方差为

$$E[\text{Var}(X | \mathcal{G})] = 0.6(100) + 0.4(100) = 100.$$

现在考虑环境均值本身的波动。好环境均值 10 相对总体均值 4 偏离 6，差环境均值 -5 偏离 -9，于是

$$\text{Var}(E[X | \mathcal{G}]) = 0.6(6^2) + 0.4((-9)^2) = 54.$$

因此 $\text{Var}(X) = 100 + 54 = 154$ 。使用末端四状态核验时，方差为

$$0.3(20 - 4)^2 + 0.3(0 - 4)^2 + 0.2(5 - 4)^2 + 0.2(-15 - 4)^2 = 76.8 + 4.8 + 0.2 + 72.2 = 154.$$

公式为何成立

把任意结果相对于总体均值的偏差拆开，

$$X - E[X] = (X - E[X | \mathcal{G}]) + (E[X | \mathcal{G}] - E[X]).$$

两边平方后会出现一个交叉乘积。将它先对信息 $\mathcal{G}$ 取条件期望，因 $E[X - E[X | \mathcal{G}] | \mathcal{G}] = 0$ ，交叉项的期望为零。剩下两项正好给出

$$\boxed{\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X | \mathcal{G})] + \text{Var}(E[X | \mathcal{G}])}.$$

这一式在风险预测中十分有用。第一项描述给定环境后仍然存在的随机波动，第二项描述环境之间的系统性差异。

第三部分

固定收益：债券、曲线与互换

Zoey Lin

第 8 章

债券价格与到期收益率

债券价格从未来现金流计算

票息债的现金流

债券的价值来自约定的未来支付。逐期列出票息和到期本金，再按各支付日期贴现求和，即得理论价格。收益率、久期和凸性随后都可以从这一现金流价格函数出发推导。

先判断价格应该高于还是低于面值

票息率 6%，市场要求收益率 5%。债券每年给你的票息比市场“正常水平”更高，因此投资者愿意支付超过 100 的价格。

反过来，如果票息率 3%，市场收益率 5%，它每年给的钱偏少，价格就应该低于 100。

常见误算

YTM 是“把所有现金流折现后刚好等于市场价”的那个单一利率。它不是每一段期限真正的即期利率；严格定价时应使用整条零息曲线。

8.1 债券现金流图

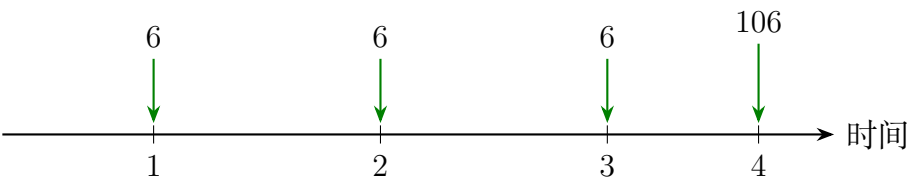


图 8.1: 票息债最好的第一步永远是先把现金流画出来。

8.2 逐项贴现定价

例题

面值 100，票息率 6%，4 年到期，年付息，市场收益率 5%。

$$P = \frac{6}{1.05} + \frac{6}{1.05^2} + \frac{6}{1.05^3} + \frac{106}{1.05^4}.$$

逐项：

$$\begin{aligned}\frac{6}{1.05} &= 5.7143, \\ \frac{6}{1.05^2} &= 5.4422, \\ \frac{6}{1.05^3} &= 5.1830, \\ \frac{106}{1.05^4} &= 87.2065.\end{aligned}$$

所以

$$P \approx 103.5460.$$

结果核对

票息率 6% 高于市场收益率 5%，债券价格应高于面值 100。结果 103.55 与直觉一致。

8.3 YTM 的 Newton 法

例题

若债券市场价格给定为 98，求 YTM。令

$$f(y) = \sum_{t=1}^4 \frac{6}{(1+y)^t} + \frac{100}{(1+y)^4} - 98.$$

取初值 $y_0 = 6\%$ 。先把这一猜测代入定价函数：

$$P(0.06) \approx 100.0000, \quad f(0.06) \approx 2.0000.$$

由逐项求导（本章后面有完整展开）， $f'(0.06) \approx -346.51$ ，因此

$$y_1 = 0.06 - \frac{2.0000}{-346.51} \approx 0.06577.$$

继续迭代即可逼近真正的 YTM。

8.4 YTM 为什么不能直接“移项求出来”

说明

因为 y 同时出现在 $(1+y)^1, (1+y)^2, (1+y)^3, \dots$ 这些不同幂次里。它不是简单的一次方程。你可以把它看成“猜一个 y ，算出价格，再看价格离市场价差多少”，所以自然要用二分法或 Newton 法。

变式

如果市场价从 98 上升到 102，而其他现金流不变，YTM 应该上升还是下降？答案是**下降**。因为贴现率越低，未来现金流折回来越值钱，价格越高。这是做任何 YTM 数值题之前都要先预测的方向。

8.5 Clean Price、Dirty Price 与应计利息

例题

假设半年付息债券票息每半年 3 元，距离上次付息已经过了 2 个月，半年共有 6 个月。应计利息近似

$$AI = 3 \times \frac{2}{6} = 1.$$

若市场报价 clean price 为 101.20，则实际结算 dirty price

$$P_{dirty} = 101.20 + 1.00 = 102.20.$$

8.6 价格曲线与切线：为什么二阶修正会改善估计

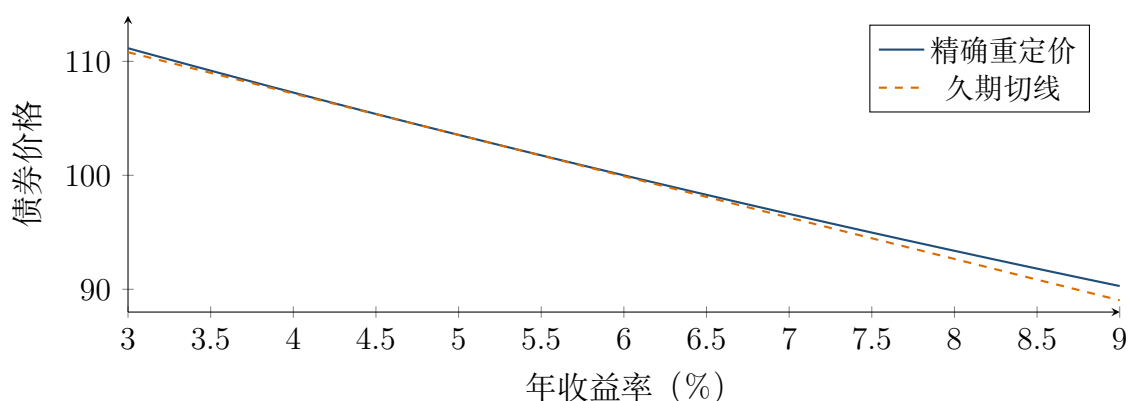


图8.2 债券价格曲线、切线近似与凸性修正。

直接算 DV01，并把单位写在旁边

在 $y = 5\%$ 时，这只四年期债券价格约 $P = 103.546$ ，修正久期约 3.5041。收益率上升 1bp，即 $\Delta y = 0.0001$ ，则

$$\Delta P \approx -PD_{mod}\Delta y = -103.546 \times 3.5041 \times 0.0001 \approx -0.03628.$$

所以每 100 元面值的这一只债券，DV01 约 0.03628 元。若面值是 100 万元（即 1 万份面值 100 元的债券），DV01 约 362.8 元。

变式

如果利率上涨 10bp 而不是 1bp，在足够小的变动下，价格损失可以先近似乘 10。但如果上涨 200bp，单纯乘 200 通常误差就明显，需要凸性或直接重定价。

8.7 YTM 的逐次逼近：价格误差与导数

说明

到期收益率是这样一个数字：把它放进贴现公式，得到的理论价格恰好等于市场成交价格。所以求 YTM 和求隐含波动率很像，本质都在找一个使误差为零的未知数。

把四笔债券现金流完全摆在桌面上

同一只债券，票息 6，到期第 4 年还 100，市场价格设为 98。

$$P(y) = \frac{6}{1+y} + \frac{6}{(1+y)^2} + \frac{6}{(1+y)^3} + \frac{106}{(1+y)^4}.$$

第一步先算 $y = 6\%$ 的价格：

$$P(0.06) = 6(0.943396 + 0.889996 + 0.839619) + 106(0.792094).$$

更方便的写法是：票息率等于收益率时，平价债 $P(0.06) = 100$ ，于是与市场价的误差 $f(0.06) = 100 - 98 = 2$ 。**第二步算斜率，而不是凭感觉调收益率：**

$$P'(y) = -\frac{6}{(1+y)^2} - \frac{12}{(1+y)^3} - \frac{18}{(1+y)^4} - \frac{424}{(1+y)^5}.$$

在 $y = 0.06$ 处，四项约为 $-5.34, -10.08, -14.26, -316.84$ ，合计约 -346.51 。**第三步 Newton 修正：**

$$y_1 = 0.06 - \frac{100 - 98}{-346.51} \approx 0.06577 = 6.577\%.$$

代回原式再次定价，直到模型价格与 98 的差低于你设定的容差。

结果核对

价格 98 低于面值 100，意味着 YTM 应高于票息率 6%。Newton 算到 6.577% 左右，方向正确。真正编程时仍需继续迭代，不能把第一步当最终精确解。

8.8 票息债的收益率：每一步都来自同一张现金流表

为了避免把“收益率”“票息率”和“折现率”混在一起，我们固定一个可重复使用的例题。面值 100，票息率 5%，剩余 3 年，每年末付息；市场全价为 98。设年有效收益率为 y ，那么

$$P(y) = \frac{5}{1+y} + \frac{5}{(1+y)^2} + \frac{105}{(1+y)^3}.$$

这不是一个能简单把 y “移到等式另一边”就解出的方程，因为 y 同时出现在三个不同的分母中。把目标价格 98 减掉，定义 $f(y) = P(y) - 98$ ；求收益率就等于解 $f(y) = 0$ 。

Newton 法：函数值、斜率、下一次试探

从 5% 开始：由于票息率也是 5%，债券价格恰为 100，所以 $f(0.05) = 2$ 。把价格函数逐项求导：

$$P'(y) = -\frac{5}{(1+y)^2} - \frac{10}{(1+y)^3} - \frac{315}{(1+y)^4}.$$

在 5% 代入：

$$\begin{aligned} P'(0.05) &= -\frac{5}{1.1025} - \frac{10}{1.157625} - \frac{315}{1.21550625} \\ &\approx -4.5351 - 8.6384 - 259.1513 \\ &\approx -272.3248. \end{aligned}$$

由此第一次迭代为

$$y_1 = 0.05 - \frac{2}{-272.3248} \approx 0.057344.$$

新的收益率提高了约 73.44bp。方向是正确的：价格 100 高于市场价 98，只有提高贴现率，才能使模型价下降。

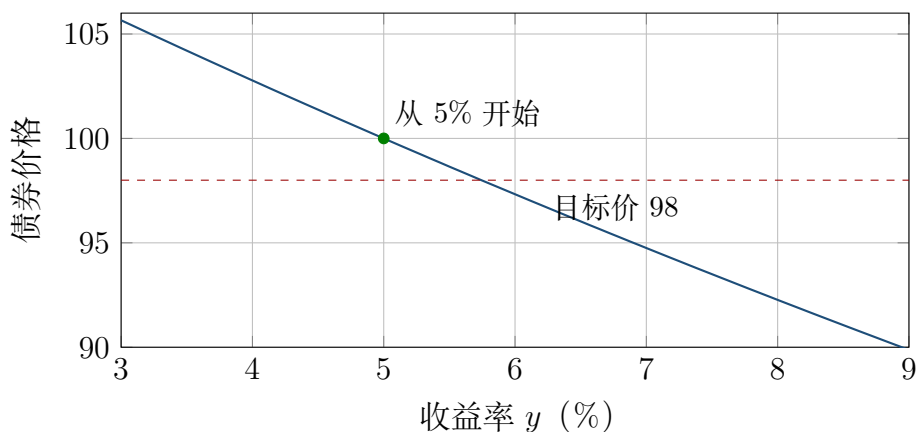


图8.3 债券价格与收益率的关系及 Newton 切线迭代。

继续迭代时要重新代入 y_1 算价格，不能沿用上一次斜率。若没有计算器，使用二分法也完全可以：分别计算 5.7% 与 5.8% 的价格，然后保留包含 98 的一半区间。两种算法应收敛到相近结果。

8.9 从价格导数推导久期

对于一般现金流 CF_t ，债券价格

$$P(y) = \sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1+y)^t}.$$

将每一项分别求导：

$$\frac{dP}{dy} = - \sum_{t=1}^n \frac{t CF_t}{(1+y)^{t+1}} = - \frac{1}{1+y} \sum_{t=1}^n t \frac{CF_t}{(1+y)^t}.$$

两边除以 $-P$ ，得到修正久期

$$D_{mod} = -\frac{1}{P} \frac{dP}{dy} = \frac{\sum_t t PV(CF_t)}{P(1+y)}.$$

如果把每期现金流现值占债券总价格的比例记为 $w_t = PV(CF_t)/P$ ，则 $\sum_t w_t = 1$ ，Macauley 久期就是 $D_M = \sum_t t w_t$ 。这便解释了“现金流加权平均回收时间”这一说法的数学来源。

数值单位

若持有市值 200 万元、修正久期 3.2 的债券头寸，收益率上升 1bp，第一阶损益近似为

$$\Delta V \approx -2,000,000 \times 3.2 \times 0.0001 = -640 \text{ 元}.$$

“DV01 为 640 元/bp”指的是每 1bp 收益率变化带来的价格变动绝对值，并不代表债券价格会上涨。

第 9 章

Duration、Convexity 与 DV01

Duration 和 Convexity 就是债券版的一阶、二阶 Taylor

价格曲线的斜率

债券价格随收益率变化形成一条曲线。在给定收益率附近，一阶导数描述局部斜率，对应久期所衡量的价格敏感度；二阶导数刻画曲率，是凸性修正的依据。

DV01 到底是什么意思

DV01 = Dollar Value of 1 basis point，意思是“收益率变化 1bp 时，债券价格大约变多少钱”。

若某债券市值 1,000,000，修正久期 4.2，那么收益率上升 1bp = 0.0001 时：

$$\Delta P \approx -PD_{mod}\Delta y = -1,000,000 \times 4.2 \times 0.0001 = -420.$$

所以 DV01 大约 420 元。

结果核对

利率上升，普通固定利率债券价格应下降；因此价格变动符号应该是负的。如果你算成正数，先检查负号。

9.1 Macaulay Duration 的直观含义

价格曲线的斜率

Duration 不是“债券还能活多久”，而是**现金流回来的平均时间**；在价格敏感度上，它是一阶近似的主角。

例题

仍用上一章债券，价格 $P = 103.5460$ 。各期现金流现值分别为 5.7143, 5.4422, 5.1830, 87.2065。于是 Macaulay Duration:

$$D_M = \frac{1 \times 5.7143 + 2 \times 5.4422 + 3 \times 5.1830 + 4 \times 87.2065}{103.5460}.$$

分子 = 5.7143 + 10.8844 + 15.5490 + 348.8258 = 380.9735, 故

$$D_M \approx 3.679.$$

修正久期

$$D_{mod} = \frac{D_M}{1 + y} = \frac{3.679}{1.05} \approx 3.5041.$$

若收益率上升 1%，价格变动约

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D_{mod} \Delta y = -3.5041 \times 0.01 = -3.50\%.$$

9.2 Convexity: 二阶修正

例题

若收益率变化较大，仅用一阶近似会偏。加入二阶项：

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D_{mod} \Delta y + \frac{1}{2} C (\Delta y)^2.$$

假设该债券凸性 $C \approx 15.2$ ，若 $\Delta y = 1\% = 0.01$ ，则二阶修正为

$$\frac{1}{2} \times 15.2 \times 0.01^2 = 0.00076 = 0.076\%.$$

所以更好的近似是

$$-3.5041\% + 0.076\% = -3.4278\%.$$

9.3 Duration/Convexity 和 Delta/Gamma 为什么是一回事

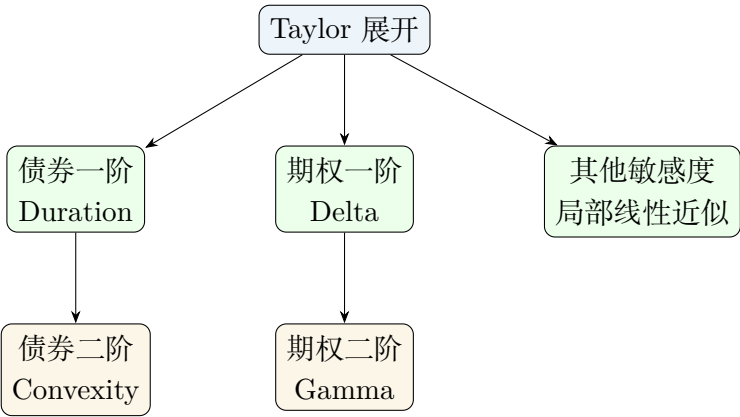


图9.1 久期、凸性与 Delta、Gamma 的局部近似。

9.4 互换定价：把固定腿和浮动腿真的一笔笔对上

说明

利率互换不是“凭空变出收益”，而是双方交换两串现金流。价格公平的那一天，两串现金流的现值应当相等。每个日期都必须使用与之匹配的贴现因子。

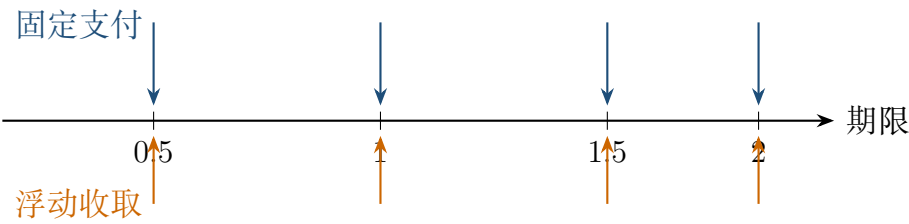


图 9.2: 互换的两条现金流腿在每个付款日相遇，计算时逐笔贴现。

两期年付互换：固定利率是如何被“算平”的

现值因子 $D(0, 1) = 0.9592878$ 、 $D(0, 2) = 0.9102616$ 。名义本金 $N = 100$ ，每年支付一次。浮动腿（单曲线简化假设）的现值：

$$PV_{float} = 100[1 - D(0, 2)] = 100(1 - 0.9102616) = 8.97384.$$

固定腿若年利率为 K ，两次付息分别为 $100K$ ，现值：

$$PV_{fixed} = 100K[D(0, 1) + D(0, 2)] = 100K(0.9592878 + 0.9102616).$$

公平条件使两腿现值相等：

$$100K(1.8695494) = 8.97384 \implies K \approx 0.048 = 4.8\%.$$

结果核对

若固定利率高于公平 4.8%，对支付固定腿的人不利：付的钱变多，互换市值下降。真实市场常用多曲线框架，本章先学习最基础的单曲线逻辑。

9.5 现金流不变时，为什么收益率越高，债券价格越低

债券有一个不同于股票的重要特点：只要发行人按约履约，未来合同规定的票息和本金往往已经写好。市场收益率的变化并不会自动把未来每一笔票息改掉，而是改变市场今天愿意为这些现金流支付的价格。

看一张四年期债券。面值 100，每年收到 6 元票息，到第四年还本，因此现金流是 $(6, 6, 6, 106)$ 。当折现率为 5% 时：

$$\begin{aligned} P(5\%) &= \frac{6}{1.05} + \frac{6}{1.05^2} + \frac{6}{1.05^3} + \frac{106}{1.05^4} \\ &\approx 5.714286 + 5.442177 + 5.183026 + 87.206462 \\ &\approx \boxed{103.545951}. \end{aligned}$$

如果市场收益率恰好升到票息率 6%，同一张债券的价格就变成 100：一张面值 100 的债券每年付 6 元票息，正好提供市场所要求的 6% 收益率，因此无需溢价或折价。

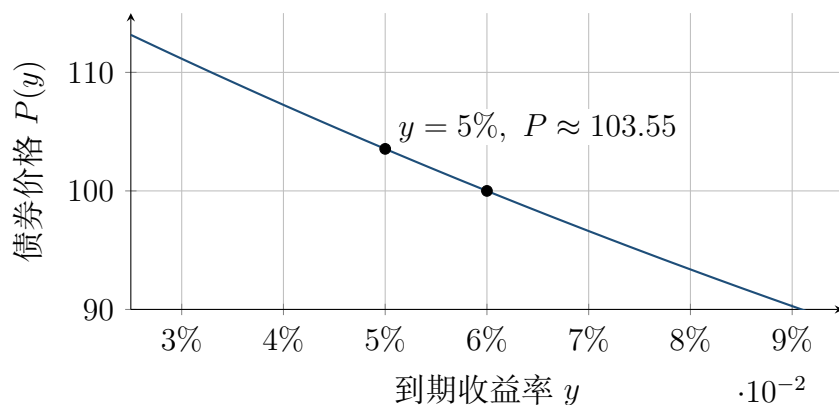


图 9.3: 票息和本金没有改变; 价格曲线下降, 来自每笔现金流的贴现因子都随收益率升高而减小。

9.6 用真正的现金流方程求 YTM

如果市场价格现在不是 103.55, 而是 98, 我们需要反向寻找收益率 y 。其目标函数为

$$f(y) = \frac{6}{1+y} + \frac{6}{(1+y)^2} + \frac{6}{(1+y)^3} + \frac{106}{(1+y)^4} - 98.$$

令 $f(y) = 0$, 依照 Newton 方法求解。导数中每一期都会乘上年数, 这是因为 $d(1+y)^{-t}/dy = -t(1+y)^{-t-1}$:

$$f'(y) = -\frac{6}{(1+y)^2} - \frac{12}{(1+y)^3} - \frac{18}{(1+y)^4} - \frac{424}{(1+y)^5}.$$

这里最后的系数 $424 = 4 \times 106$, 不是 4×100 。最后一期的票息与本金必须一起求导。

价格为 98 时的真实迭代结果

从 $y_0 = 6\%$ 开始, $P(0.06) = 100$, 所以 $f(y_0) = 2$; 由上式求得 $f'(0.06) = -346.5106$ 。于是

$$y_1 = 0.06 - \frac{2}{-346.5106} = 0.06577183.$$

此时模型价格已接近 98。第二次迭代得到

$$y_2 \approx 0.0658493 = 6.58493\%.$$

重新把 6.58493% 代入四笔现金流的贴现表达式, 价格约为 98.0000。这个“回代”是判断求根是否成功最直接的办法。

9.7 久期和凸性到底是在近似什么

令债券价格对市场收益率的函数为 $P(y)$ 。当收益率变动 Δy 不大时, Taylor 展开为

$$P(y + \Delta y) \approx P(y) + P'(y)\Delta y + \frac{1}{2}P''(y)(\Delta y)^2.$$

为了让不同价格的债券可以相互比较，金融里把一阶导数除以债券价格并取负号，定义修正久期；把二阶导数除以价格，定义凸性：

$$D_{\text{mod}} = -\frac{P'(y)}{P(y)}, \quad C = \frac{P''(y)}{P(y)}.$$

于是

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D_{\text{mod}} \Delta y + \frac{1}{2} C (\Delta y)^2.$$

这不是额外发明的两个修正因子，它们只是 Taylor 展开的一阶、二阶系数。

同一只四年期债券：一阶、二阶与精确定价并排

在 $y = 5\%$ 时，准确计算可得

$$P = 103.54595, \quad D_{\text{mod}} \approx 3.50407, \quad C \approx 16.20898.$$

收益率上升 $100 \text{ bp} = 0.01$ ，久期近似的价格变动比例是

$$-3.50407 \times 0.01 = -3.50407\%.$$

二阶修正是

$$\frac{1}{2} \times 16.20898 \times 0.01^2 = 0.000810449 = 0.08104\%.$$

因此二阶近似预测约 -3.42303% 。直接用 $y = 6\%$ 重定价得到

$$\frac{100 - 103.54595}{103.54595} \approx -3.4245\%.$$

两者相当接近；收益率变化越大，省略的三阶及以上项通常越值得关注。

DV01 的单位尤其容易写错。若价格按面值 100 报价，则这张债券的 DV01 约为

$$DV01 \approx P D_{\text{mod}} \times 10^{-4} = 103.54595 \times 3.50407 \times 0.0001 \approx 0.03628,$$

单位是“面值 100 的报价单位每 1bp”，不是总持仓人民币金额。如果持有面值 1000 万元，才需要按持仓面值把它换算为实际货币风险。

9.8 从求导得到久期，而不是直接记忆价格近似

设一只债券在 $t = 1, \dots, n$ 时刻的现金流为 CF_t ，收益率以每年复利记为 y 。今天的价格为

$$P(y) = \sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1+y)^t}.$$

将每一项看作一个函数来求导：

$$\frac{d}{dy} \frac{CF_t}{(1+y)^t} = -t CF_t (1+y)^{-t-1}.$$

因此

$$\begin{aligned} P'(y) &= -\sum_{t=1}^n \frac{tCF_t}{(1+y)^{t+1}} \\ &= -\frac{1}{1+y} \sum_{t=1}^n t \frac{CF_t}{(1+y)^t}. \end{aligned}$$

两边同时除以价格 P ，就得到

$$-\frac{P'(y)}{P(y)} = \frac{1}{1+y} \frac{\sum_t t PV(CF_t)}{\sum_t PV(CF_t)} = \frac{D_M}{1+y} = D_{\text{mod}}.$$

这里的 Macaulay 久期 D_M 是各笔现金流日期按其现值占比得到的加权平均；修正久期则是债券价格对收益率的相对变化斜率。两者有密切关系，但并不相同。

以面值 100、四年到期、每年票息 6、YTM 为 5% 的债券为例：

年份	现金流	现金流现值	年份 × 现值
1	6	5.7143	5.7143
2	6	5.4422	10.8844
3	6	5.1830	15.5490
4	106	87.2064	348.8256
合计		103.5459	380.9733

这些数值保留四位小数后才相加，最后一列的总和会有微小的舍入误差。于是

$$D_M \approx \frac{380.9733}{103.5459} = 3.6793, \quad D_{\text{mod}} \approx \frac{3.6793}{1.05} = 3.5041.$$

收益率只上升 1 bp = 0.0001 时，Taylor 的一阶项给出

$$\Delta P \approx P'(y)\Delta y = -P D_{\text{mod}}\Delta y \approx -103.5459 \times 3.5041 \times 0.0001 = -0.03628.$$

因此这只债券每 100 元面值的 DV01 大约为 0.03628 元。这个量同时依赖价格、久期以及报价面值；直接把“久期 3.5 年”写成“DV01 3.5”是单位错误。

再求一次导数，可以得到

$$P''(y) = \sum_t \frac{t(t+1)CF_t}{(1+y)^{t+2}} > 0$$

(假设现金流都为正)。因此债券价格随收益率下降而上升，但曲线并非直线而是凸的。二阶价格近似

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D_{\text{mod}}\Delta y + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{P''(y)}{P(y)} (\Delta y)^2}_{\text{凸性}}$$

只是同一个 Taylor 展开的前两项。稍后期权的 Delta/Gamma 计算会看到相同结构。

第 10 章

零息曲线、远期利率与互换

为什么不能永远只用一个 YTM

各期限的贴现价格

不同到期日对应不同的零息贴现因子。存款、远期利率协议和互换提供了推算这些因子的市场信息。逐期求解贴现因子的过程称为 Bootstrap，较短期限的结果会用于较长期限的计算。

远期利率的最直观推导

假设今天存 1 年，增长因子是 $1 + r_1$ ；今天直接存 2 年，增长因子是 $(1 + r_2)^2$ 。那么从第 1 年到第 2 年的远期增长因子，必须满足

$$(1 + r_1)(1 + f_{1,2}) = (1 + r_2)^2.$$

所以

$$1 + f_{1,2} = \frac{(1 + r_2)^2}{1 + r_1}.$$

这就是“不能有无风险绕路赚更多”的无套利逻辑。

10.1 Bootstrap 的一层层“剥皮”直觉



图10.1 由短至长期限逐期求解贴现因子。

例题

6M 简单利率 4%，则

$$D(0, 0.5) = \frac{1}{1 + 0.04 \times 0.5} = 0.980392.$$

若 6M×12M FRA 为 4.4%，则

$$1 + 0.044 \times 0.5 = \frac{D(0, 0.5)}{D(0, 1)},$$

所以

$$D(0, 1) = \frac{0.980392}{1.022} = 0.959287.$$

若 2 年年付固定互换 par rate 为 4.8%，则

$$0.048[D(0, 1) + D(0, 2)] = 1 - D(0, 2).$$

代入 $D(0, 1) = 0.959287$ 得

$$1.048D(0, 2) = 0.953954, \quad D(0, 2) = 0.910261.$$

10.2 远期利率

例题

由贴现因子算 1 年到 2 年远期率（年复利近似）：

$$1 + f_{1,2} = \frac{D(0, 1)}{D(0, 2)} = \frac{0.959287}{0.910261} = 1.05386.$$

所以

$$f_{1,2} \approx 5.386\%.$$

10.3 公平互换利率怎么从贴现因子算出来

说明

利率互换的固定腿和浮动腿在起始日价值必须一样。对于标准 par swap，浮动腿价值可以简化成 $1 - D(0, T)$ ，固定腿则是“固定利率 K 乘上所有付息日贴现因子的总和”。

例题

若年付息，两年互换的贴现因子为 $D_1 = 0.959287$, $D_2 = 0.910261$ ，则公平固定利率

$$K = \frac{1 - D_2}{D_1 + D_2} = \frac{1 - 0.910261}{0.959287 + 0.910261} = \frac{0.089739}{1.869548} \approx 4.80\%.$$

这与 Bootstrap 时使用的 4.8% 报价一致，形成闭环复核。

10.4 为何贴现因子比一条“市场收益率”更适合连接不同产品

在债券定价时，我们常用一个单一的到期收益率把所有现金流折现。这对同一张债券反求 YTM 很方便，但对整条市场曲线而言，更根本的对象是不同到期日的贴现因子 $D(0, T)$ ：今天花多少钱，才能在未来 T 年确切得到 1 元？

若 $D(0, 1) = 0.959287$, $D(0, 2) = 0.910261$ ，那么今天购买一个一年后支付 100 元的零息债，应支付 95.9287 元；两年后支付 100 元的零息债，则应支付 91.0261 元。两种票息、不同期限的工具只要能拆成若干未来现金流，便都可以按同一条曲线逐笔定价。

零息、远期和互换：同一组贴现因子的三种读法

一年和两年的贴现因子分别是 0.959287 和 0.910261。

第一种读法：零息利率。若采用年复利， $D(0, 2) = (1 + z_2)^{-2}$ ，所以

$$z_2 = \sqrt{\frac{1}{0.910261}} - 1 \approx 4.813\%.$$

第二种读法：一年到两年的远期利率。为了避免两种现金流等价的投资策略出现无风险套利，必须先把它们统一到同一支付时点。将时刻 1 的 1 元滚动到时刻 2，得到：

$$D(0, 2)(1 + f_{1,2}) = D(0, 1), \quad f_{1,2} = \frac{0.959287}{0.910261} - 1 \approx 5.386\%.$$

第三种读法：固定利率互换。若互换两年、每年年末付一次固定息，平价固定利率 K 满足

$$K[D(0, 1) + D(0, 2)] = 1 - D(0, 2),$$

因此

$$K = \frac{1 - 0.910261}{0.959287 + 0.910261} \approx 4.80\%.$$

同一条曲线能产生“零息利率”“远期利率”和“平价互换利率”，是因为它们只是对贴现因子的不同排列。金融市场上这些利率并不会完全一样，不能看到“2 年”两个字就把它们当成同一个数字。

10.5 曲线形状的图像并不是未来利率的保证

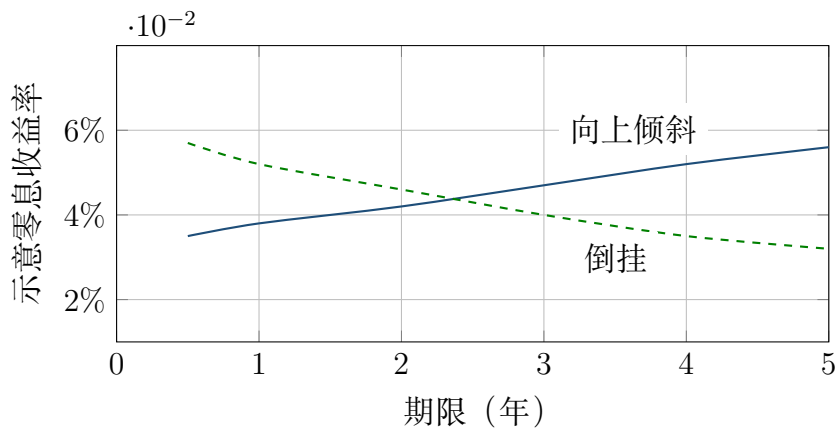


图 10.2: 期限结构可能上升、下降，也可能呈驼峰。两条曲线仅为教学示意，并非市场报价。

收益率曲线包含未来短端利率预期、期限溢价、流动性等多方面因素。即使观察到倒挂，也不能仅凭曲线形状断言未来利率会按照某个数值路径变化。要区分“市场报价隐含的远期率”与“在真实概率下对未来短率的预测”。

专题 C

债券敏感度、收益率曲线与计算误差

对固定收益来说，价格、收益率、久期、凸性不是四个彼此独立的概念。它们都来自一条现金流现值函数。把函数本身看清楚，计算就不会只剩下一串公式。

C.1 每一笔现金流对收益率都敏感

面值 100，三年期年票息 5，统一到期收益率 $y = 4\%$ 。价格为

$$P(y) = \frac{5}{1+y} + \frac{5}{(1+y)^2} + \frac{105}{(1+y)^3}.$$

逐项现值： $5/1.04 = 4.807692$ ， $5/1.0816 = 4.622781$ ， $105/1.124864 = 93.344618$ ，因此 $P(0.04) = 102.775091$ 。

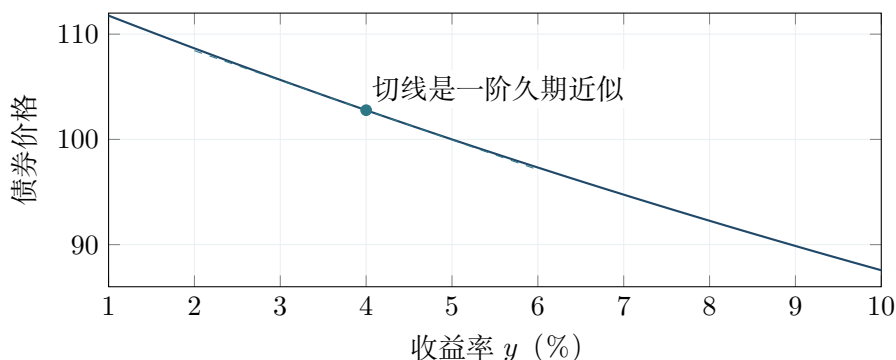
C.2 从价格函数直接求一阶导数

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{5}{(1+y)^2} - \frac{2 \times 5}{(1+y)^3} - \frac{3 \times 105}{(1+y)^4}.$$

在 $y = 4\%$ 时，三个绝对值分别为 $5/1.0816 = 4.62352$ 、 $10/1.124864 = 8.88996$ 、 $315/1.169859 = 269.263$ (约)；所以 $P'(0.04) \approx -282.78$ 。修正久期定义为

$$D_{\text{mod}} = -\frac{1}{P} \frac{dP}{dy} \approx \frac{282.78}{102.7751} \approx 2.7514.$$

涨 1bp 时 $\Delta y = 0.0001$ ，绝对价格一阶变化 $\Delta P \approx -282.78 \times 0.0001 = -0.02828$ 。对于这张面值 100 的债券，DV01 约为 0.0283 元。



C.3 二阶项的来源不需要背

再求一次导数：

$$P''(y) = \frac{2 \times 5}{(1+y)^3} + \frac{6 \times 5}{(1+y)^4} + \frac{12 \times 105}{(1+y)^5} > 0.$$

凸性 $C = P''/P$ 。正值意味着价格-收益率曲线向上凸，所以只用切线预测较大幅度利率变化会产生系统误差。

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D_{\text{mod}} \Delta y + \frac{1}{2} C (\Delta y)^2.$$

此式中的 D_{mod} 与 C 都针对同一个统一收益率平移定义。收益率曲线不同期限分别变动时，需要 Key Rate Duration 或重新按各期限贴现因子估值。

C.4 用贴现因子做曲线 Bootstrap

设 1 年期零息贴现因子 $D_1 = 0.96$ ；2 年期面值 100、年票息 5 的债券市场价格为 101.30。债券定价方程为

$$101.30 = 5 \times 0.96 + 105D_2.$$

先移去已知的一年票息现值： $101.30 - 4.80 = 96.50$ 。所以 $D_2 = 96.50/105 = 0.9190476$ 。将它转换成年复利两年零息率：

$$(1 + z_2)^2 = \frac{1}{D_2} = 1.088083, \quad z_2 = \sqrt{1.088083} - 1 \approx 4.311\%.$$

最重要的是先把现金流表写清楚，而不是一看到“Bootstrap”就套公式。

C.5 三种检查方法

第一，若每期无风险利率非负，贴现因子应为正并通常随到期日下降。第二，票息与市场价必须使用一致的清洁价/全价口径。第三，曲线定价后要把算出的 D_1, D_2 重新代入原来市场工具，检查能否还原原始报价。交易日、计息基准和付息频率也必须一致。

Zoey Lin

3 债券收益率与价格微分

3.1 先固定现金流，再改变市场收益率

有一只三年期债券，面值 100，每年末支付票息 5，最后一年还本。市场使用按年复利的统一到期收益率 y ，债券价格函数为

$$P(y) = \frac{5}{1+y} + \frac{5}{(1+y)^2} + \frac{105}{(1+y)^3}.$$

当 $y = 0.06$ 时，三笔现金流的现值为

$$\begin{aligned} 5/1.06 &= 4.716981, \\ 5/1.06^2 &= 4.449982, \\ 105/1.06^3 &= 88.160025. \end{aligned}$$

加总得到 $P(0.06) = 97.326988$ 。由于票息率 5% 小于市场收益率 6%，债券以低于面值的价格交易。

3.2 久期从求导得到

对每一笔付款 $CF_t(1+y)^{-t}$ 求导，会出现 $-tCF_t(1+y)^{-t-1}$ 。因此

$$P'(y) = - \sum_{t=1}^3 \frac{tCF_t}{(1+y)^{t+1}}.$$

把价格 $P(y)$ 从右边提出来，记 $PV_t = CF_t(1+y)^{-t}$ ，则

$$-\frac{P'(y)}{P(y)} = \frac{1}{1+y} \underbrace{\frac{\sum_{t=1}^3 tPV_t}{P(y)}}_{D_M}.$$

括号内为 Macaulay 久期。现在逐项代入刚才的现金流现值，

$$\begin{aligned} \sum tPV_t &= 1(4.716981) + 2(4.449982) + 3(88.160025) \\ &= 4.716981 + 8.899964 + 264.480075 = 278.097020, \\ D_M &= 278.097020/97.326988 = 2.857347, \\ D_{mod} &= 2.857347/1.06 = 2.695611. \end{aligned}$$

若收益率上涨 10 个基点， $\Delta y = 0.001$ ，一阶估计的价格变动为

$$\Delta P \approx -PD_{mod}\Delta y = -97.326988 \times 2.695611 \times 0.001 = -0.262349.$$

报告 DV01 时，通常用收益率上升或下降 1bp 的价格变化绝对值。它约等于 0.026235 元/百元面值。

3.3 曲率为什么使久期估算存在偏差

继续对 $P(y)$ 求导,

$$P''(y) = \sum_{t=1}^3 \frac{t(t+1)CF_t}{(1+y)^{t+2}} > 0.$$

二阶导数为正, 因此债券价格随收益率下降的曲线具有凸性。在 y 附近进行 Taylor 展开,

$$P(y + \Delta y) \approx P(y) + P'(y)\Delta y + \frac{1}{2}P''(y)(\Delta y)^2.$$

如果定义修正凸性 $C = P''(y)/P(y)$, 两边同时除以 $P(y)$, 得到熟悉的敏感度表达式,

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D_{mod}\Delta y + \frac{1}{2}C(\Delta y)^2.$$

该公式仅适用于在原收益率附近的小幅变化。若整条收益率曲线发生扭曲, 使用一个统一 y 得到的久期不能完全描述期限结构风险。

3.4 反过来求到期收益率

如果同一只债券的市场价变成 97, 需要求满足 $P(y) = 97$ 的 y 。可以定义 $f(y) = P(y) - 97$ 。从 $y_0 = 0.06$ 出发,

$$f(y_0) = 97.326988 - 97 = 0.326988.$$

同时

$$P'(0.06) = -P(0.06)D_{mod} = -97.326988 \times 2.695611 \approx -262.350.$$

第一步 Newton 更新为

$$y_1 = y_0 - \frac{f(y_0)}{f'(y_0)} = 0.06 - \frac{0.326988}{-262.350} \approx 0.0612463.$$

重新定价后继续迭代, 得到 $y \approx 0.06124924$ 。逐项现金流重新贴现后将回到市场价 97。这里导数为负, 价格偏高时必须上调试算收益率, 方向能够在动手算之前判断。

债券价格、久期和凸性的一次完整复核

一只四年期年付息债券面值 100，票息每年 6 元。若到期收益率为 5%（年复利），价格函数为

$$P(y) = \frac{6}{1+y} + \frac{6}{(1+y)^2} + \frac{6}{(1+y)^3} + \frac{106}{(1+y)^4}.$$

在 $y = 0.05$ 处，四笔现值分别为 5.714286、5.442177、5.183026、87.206462。求和得到

$$P(0.05) = 103.5459505.$$

最后一期应折现 106 元，原因是该年同时偿还票息 6 元和本金 100 元。将最后一期误写成 100 元会系统性低估价格。

从导数建立修正久期

价格对收益率求一阶导数，逐项应用 $\frac{d}{dy}(1+y)^{-t} = -t(1+y)^{-t-1}$,

$$P'(y) = -\sum_{t=1}^4 \frac{tCF_t}{(1+y)^{t+1}}.$$

在 5% 处计算得 $P' = -362.8319672$ 。修正久期由 $D_{\text{mod}} = -P'/P$ 定义，所以

$$D_{\text{mod}} = \frac{362.8319672}{103.5459505} = 3.5040672.$$

该债券按每 100 元面值报价时，1bp 对价格的一阶影响为

$$\Delta P \simeq -PD_{\text{mod}} \times 10^{-4} = -0.0362832.$$

若持仓面值为 1000 万元，须按面值比例放大这一数字，得到约 3628.32 元/bp。

二阶导数与凸性

继续求导：

$$P''(y) = \sum_{t=1}^4 \frac{t(t+1)CF_t}{(1+y)^{t+2}} = 1678.3738651.$$

归一化凸性 $C = P''/P = 16.2089764$ 。若收益率上升 100bp，二阶价格近似为

$$\frac{\Delta P}{P} \simeq -3.5040672(0.01) + \frac{1}{2}(16.2089764)(0.01)^2 = -3.42302\%.$$

直接用 6% 重新定价得到 100 元，对应变化 -3.42452%。两种结果相差很小，便于检查久期和凸性的计算。

第四部分

组合、因子与资产定价

Zoey Lin

第 11 章

组合方差及其矩阵表示

矩阵公式只是把很多交叉项压缩写了

组合方差的交叉项

两资产组合方差你可能见过： $w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_{12}$ 。当资产变成 3 个、10 个、100 个时，手写所有交叉项太麻烦，所以才压缩成 $w^T\Sigma w$ 。

先看两资产，再看矩阵

如果 $w = (0.6, 0.4)$, $\sigma_1 = 20\%$, $\sigma_2 = 30\%$, 相关系数 0.5, 则协方差 $= 0.2 \times 0.3 \times 0.5 = 0.03$ 。

组合方差

$$0.6^2 \times 0.04 + 0.4^2 \times 0.09 + 2 \times 0.6 \times 0.4 \times 0.03 = 0.0432.$$

组合波动率 $= \sqrt{0.0432} = 20.78\%$ 。

例题

设

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.01 & 0 \\ 0.01 & 0.09 & 0.018 \\ 0 & 0.018 & 0.16 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.3 \\ 0.2 \end{pmatrix}.$$

先算 Σw :

$$0.04 \times 0.5 + 0.01 \times 0.3 + 0 \times 0.2 = 0.023,$$

$$0.01 \times 0.5 + 0.09 \times 0.3 + 0.018 \times 0.2 = 0.0356,$$

$$0 \times 0.5 + 0.018 \times 0.3 + 0.16 \times 0.2 = 0.0374.$$

所以 $\Sigma w = (0.023, 0.0356, 0.0374)^T$ 。再左乘 w^T :

$$w^T \Sigma w = 0.5 \times 0.023 + 0.3 \times 0.0356 + 0.2 \times 0.0374 = 0.02966.$$

组合波动率

$$\sigma_p = \sqrt{0.02966} = 17.22\%.$$

11.1 为什么相关性下降会带来分散化

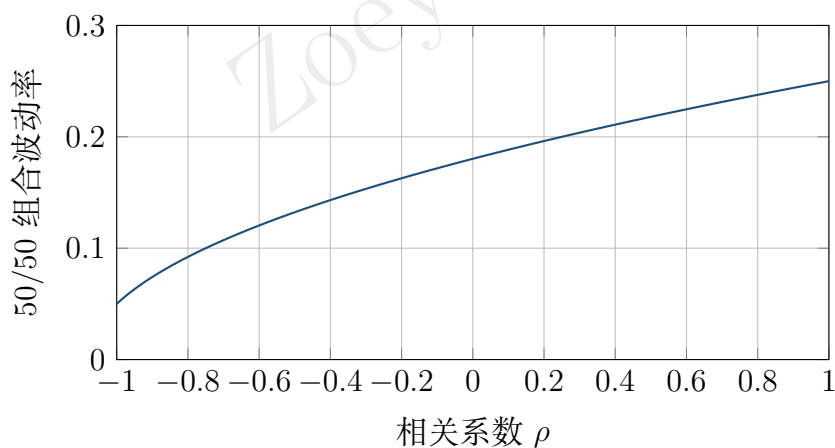


图11.1 相关系数对两资产组合波动率的影响。

说明

分散化不是“多买几只资产”这么简单。真正重要的是它们在坏时候是不是一起跌。两个波动都很大的资产，只要相关性足够低，也可能组合出更平稳的结果。

11.2 两资产最小方差：为什么导数等于零就找到权重

说明

你有两种资产，想选一个比例让组合尽量平稳。这里的“尽量平稳”意思是**组合方差最小**。由于两资产权重相加必须是 1，未知量其实只有一个： w 。

从开括号一直算到最优权重

设 $\sigma_1 = 0.20, \sigma_2 = 0.30, \rho = 0.25$ ，则

$$\sigma_{12} = 0.20 \times 0.30 \times 0.25 = 0.015.$$

令资产 1 权重是 w ，资产 2 就是 $1 - w$ 。

$$\begin{aligned} V(w) &= 0.04w^2 + 0.09(1-w)^2 + 0.03w(1-w) \\ &= 0.04w^2 + 0.09(1 - 2w + w^2) + 0.03w - 0.03w^2 \\ &= (0.04 + 0.09 - 0.03)w^2 + (-0.18 + 0.03)w + 0.09 \\ &= 0.10w^2 - 0.15w + 0.09. \end{aligned}$$

求导： $V'(w) = 0.20w - 0.15$ ，令其为零：

$$0.20w = 0.15 \implies w = 0.75.$$

二阶导数 $V''(w) = 0.20 > 0$ ，故这是最小值点。两资产的最佳权重就是 $(0.75, 0.25)$ 。

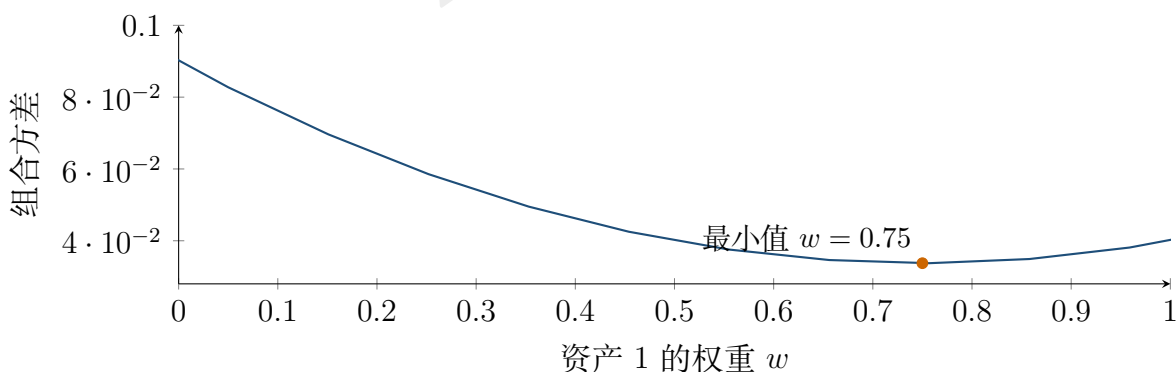


图 11.2: 最小方差组合就是在这条抛物线上找最低点。

结果核对

纯数学最小方差点不一定满足**所有实际投资限制**。若要求做多、权重上限或行业约束，最优解可能被限制到边界上。

11.3 从九个矩阵元素到六个真正独立的风险项

对称矩阵中的风险项

协方差矩阵的第 (ij) 项等于第 (ji) 项。三资产组合的方差可以按三项自身方差和三对交叉协方差展开。矩阵记号将这些乘积统一写入一个二次型。

不用矩阵符号，完整展开 $w^T \Sigma w$

设权重 $w = (0.5, 0.3, 0.2)$ ，协方差矩阵是

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.01 & 0 \\ 0.01 & 0.09 & 0.018 \\ 0 & 0.018 & 0.16 \end{pmatrix}.$$

三个自身风险：

$$0.5^2 \times 0.04 = 0.0100, \quad 0.3^2 \times 0.09 = 0.0081, \quad 0.2^2 \times 0.16 = 0.0064.$$

三对交叉风险：

$$\begin{aligned} 2(0.5)(0.3)(0.01) &= 0.0030, \\ 2(0.5)(0.2)(0) &= 0, \\ 2(0.3)(0.2)(0.018) &= 0.00216. \end{aligned}$$

于是方差

$$0.0100 + 0.0081 + 0.0064 + 0.0030 + 0 + 0.00216 = 0.02966,$$

波动率 $\sigma_p = \sqrt{0.02966} \approx 17.22\%$ 。它应当和前一节先做 Σw 再做点积得到的结果一致。

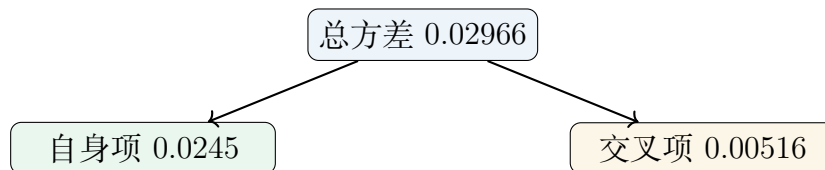


图11.3 组合方差的自身项与交叉协方差项。

11.4 为什么协方差矩阵可以描述全部二阶风险

设三只资产在同一期的随机收益率组成列向量

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}.$$

投资组合收益是普通的加权和： $R_p = w_1 R_1 + w_2 R_2 + w_3 R_3 = w^T R$ 。把随机变量减去各自的均值后再平方，产生三种平方项和三组交叉项：

$$\begin{aligned}\text{Var}(R_p) &= w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + w_3^2 \sigma_3^2 \\ &\quad + 2w_1 w_2 \sigma_{12} + 2w_1 w_3 \sigma_{13} + 2w_2 w_3 \sigma_{23}.\end{aligned}$$

矩阵表达式 $w^T \Sigma w$ 只是把这六项收进一个整齐的记号。先右乘再左乘，可以看清每一项的来源。假设

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.01 & 0 \\ 0.01 & 0.09 & 0.018 \\ 0 & 0.018 & 0.16 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.3 \\ 0.2 \end{pmatrix}.$$

逐行计算

$$\Sigma w = \begin{pmatrix} 0.04 \times 0.5 + 0.01 \times 0.3 \\ 0.01 \times 0.5 + 0.09 \times 0.3 + 0.018 \times 0.2 \\ 0.018 \times 0.3 + 0.16 \times 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.023 \\ 0.0356 \\ 0.0374 \end{pmatrix}.$$

最后点乘权重：

$$w^T \Sigma w = 0.5 \times 0.023 + 0.3 \times 0.0356 + 0.2 \times 0.0374 = 0.02966.$$

波动率为 $\sqrt{0.02966} \approx 17.22\%$ 。如果只看平方项而漏掉协方差项，组合风险就会被算错。

11.5 最小方差组合的拉格朗日乘子从哪里来

对任意资产数、且只要求权重和为 1 的情形，可以写成

$$\min_w \frac{1}{2} w^T \Sigma w, \quad \mathbf{1}^T w = 1.$$

在协方差矩阵正定时，最优解存在且唯一。引入乘子 λ ：

$$\mathcal{L}(w, \lambda) = \frac{1}{2} w^T \Sigma w - \lambda (\mathbf{1}^T w - 1).$$

对 w 求导： $\Sigma w - \lambda \mathbf{1} = 0$ ，于是

$$w = \lambda \Sigma^{-1} \mathbf{1}.$$

利用约束 $\mathbf{1}^T w = 1$ ，可求出

$$\lambda = \frac{1}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}}, \quad w_{GMV} = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}}.$$

这里还没有规定不允许做空。如果加入每个 $w_i \geq 0$ 等约束，就不能直接套这一条无约束公式，需要求解带不等式约束的优化问题。

选一个容易手算的例子：假设三只资产彼此不相关，且方差分别为 0.04, 0.09, 0.16。那么协方差矩阵是对角矩阵，逆矩阵只需逐个元素取倒数：

$$\Sigma^{-1} \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 25 \\ 11.1111 \\ 6.25 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1} = 42.3611.$$

从而

$$w_{GMV} \approx \begin{pmatrix} 0.5902 \\ 0.2623 \\ 0.1475 \end{pmatrix}.$$

权重之所以更偏向第一只资产，并非因为它的预期收益更高（我们根本还没有提供预期收益），而是因为它的方差最低。最优组合方差也能直接算出：

$$\sigma_{GMV}^2 = \frac{1}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \approx 0.0236066, \quad \sigma_{GMV} \approx 15.36\%.$$



图 11.4: 在三只资产互不相关时，最低方差组合按“方差的倒数”分配权重。

Zoey Lin

第 12 章

最小方差组合与 CAPM

最小方差组合是在“分散”而不是“挑最稳的单只资产”

资产权重的选择

资产之间的相关关系决定了组合的分散化效果。全局最小方差组合在权重之和为一的条件下，使整体收益方差达到最小。最优权重需要结合各资产方差及两两协方差共同求解。

为什么相关系数很关键

若两只资产波动率都不低，但相关系数接近 -1，它们可能互相抵消，组合反而很稳。相反，若相关系数接近 +1，分散效果就很弱。

CAPM 的一句话翻译

$$E[R_i] = r_f + \beta_i(E[R_M] - r_f)$$

意思是：先拿无风险收益；如果你承担市场系统性风险，再按 β 倍数要求额外风险补偿。

12.1 两资产 GMV 的显式公式

例题

两资产波动率分别为 20%, 30%, 相关系数 0.25。协方差

$$\sigma_{12} = 0.2 \times 0.3 \times 0.25 = 0.015.$$

设资产 1 权重为 w , 则

$$\sigma_p^2 = w^2(0.04) + (1-w)^2(0.09) + 2w(1-w)(0.015).$$

展开:

$$\sigma_p^2 = 0.10w^2 - 0.15w + 0.09.$$

求导并令零:

$$0.20w - 0.15 = 0 \quad \Rightarrow \quad w = 0.75.$$

因此 GMV 权重为 (0.75, 0.25)。

12.2 三资产 GMV 为什么会出现 $\Sigma^{-1}\mathbf{1}$

说明

三资产以后, 直接把一个权重写成 w 、另一个写成 $1-w$ 已经不够用了。于是我们用“最小化 $w^T \Sigma w$, 同时要求 $\mathbf{1}^T w = 1$ ”的拉格朗日乘子法。

例题

目标函数

$$\mathcal{L} = w^T \Sigma w - \lambda(\mathbf{1}^T w - 1).$$

对 w 求导:

$$2\Sigma w - \lambda \mathbf{1} = 0.$$

移项:

$$\Sigma w = \frac{\lambda}{2} \mathbf{1}.$$

左乘 Σ^{-1} :

$$w = \frac{\lambda}{2} \Sigma^{-1} \mathbf{1}.$$

再用约束 $\mathbf{1}^T w = 1$ 消去 λ , 得到

$$w_{GMV} = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}}.$$

12.3 CAPM

例题

若无风险利率 $r_f = 3\%$ ，市场预期收益 $E[R_M] = 9\%$ ，某资产 $\beta = 1.2$ ，则

$$E[R_i] = r_f + \beta(E[R_M] - r_f) = 3\% + 1.2 \times 6\% = 10.2\%.$$

12.4 三资产最小方差：看清楚矩阵逆在做什么

设三只资产的年化波动率分别为 20%、30%、40%，为便于第一次演算，先假设三者互不相关。协方差矩阵于是是对角矩阵：

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & 0.09 & 0 \\ 0 & 0 & 0.16 \end{pmatrix}.$$

如果组合权重为 $w = (w_1, w_2, w_3)^T$ ，组合方差是

$$\sigma_p^2 = 0.04w_1^2 + 0.09w_2^2 + 0.16w_3^2, \quad w_1 + w_2 + w_3 = 1.$$

这是一个有约束的极小值问题。取拉格朗日函数

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}w^T \Sigma w - \lambda(\mathbf{1}^T w - 1).$$

对三个权重逐项求偏导，依次得到

$$0.04w_1 - \lambda = 0, \quad 0.09w_2 - \lambda = 0, \quad 0.16w_3 - \lambda = 0.$$

因此 $w_1 = 25\lambda$, $w_2 = (100/9)\lambda$, $w_3 = 6.25\lambda$ 。代入权重和为 1 的约束：

$$(25 + 11.1111 + 6.25)\lambda = 1, \quad \lambda \approx 0.023607.$$

所以

$$w \approx (0.5902, 0.2623, 0.1475)^T.$$

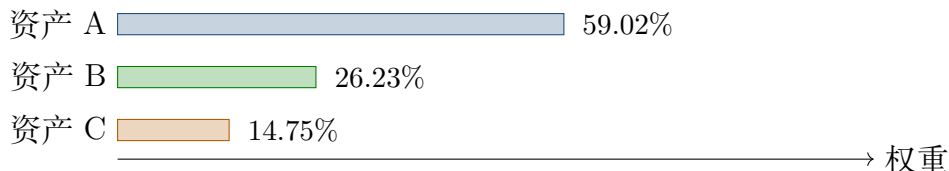


图12.1 两资产最小方差组合的权重结构。

矩阵公式 $w = \Sigma^{-1}\mathbf{1}/(\mathbf{1}^T \Sigma^{-1}\mathbf{1})$ 只是在压缩上面的三条一元方程。由于 Σ 是对角矩阵，逆矩阵十分简单：把每个对角元素取倒数即可， $\Sigma^{-1} = \text{diag}(25, 11.1111, 6.25)$ 。

平方与权重的检验

将所得权重直接代入原方差式：

$$\sigma_p^2 \approx 0.04(0.5902)^2 + 0.09(0.2623)^2 + 0.16(0.1475)^2 \approx 0.02361.$$

于是 $\sigma_p \approx 15.37\%$ ，低于三只资产各自的波动率。由于我们事先设定零相关性，分散化效果十分明显；如果相关性显著为正，最优权重也会变化。

12.5 为什么风险贡献可以相加

组合波动率 $\sigma_p = \sqrt{w^T \Sigma w}$ 。对第 i 个权重求偏导：

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial w_i} = \frac{(\Sigma w)_i}{\sigma_p}.$$

将导数乘以对应权重，定义风险贡献 $RC_i = w_i(\Sigma w)_i / \sigma_p$ 。求和后

$$\sum_i RC_i = \frac{\sum_i w_i(\Sigma w)_i}{\sigma_p} = \frac{w^T \Sigma w}{\sigma_p} = \sigma_p.$$

最后一步并非经验规律，而是代数恒等式。做风险报表时，如果各项贡献加不回组合总波动率，就要检查是否混用了方差、波动率或不同时间口径。

12.6 为什么组合方差里有两次权重

考虑两只股票，单只收益率分别为随机变量 R_1, R_2 ，投资组合收益为

$$R_p = w_1 R_1 + w_2 R_2.$$

想得到组合方差，应计算 $E[(R_p - E[R_p])^2]$ 。把括号打开：

$$\begin{aligned} (R_p - E[R_p])^2 &= [w_1(R_1 - \mu_1) + w_2(R_2 - \mu_2)]^2 \\ &= w_1^2(R_1 - \mu_1)^2 + w_2^2(R_2 - \mu_2)^2 \\ &\quad + 2w_1w_2(R_1 - \mu_1)(R_2 - \mu_2). \end{aligned}$$

再取期望，三项分别变成方差、方差、协方差，于是

$$\sigma_p^2 = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1w_2 \sigma_{12}.$$

这一步解释了矩阵公式 $w^T \Sigma w$ 的两次权重来源：组合收益本来是一阶权重的和，方差需要把这个和平方，因此权重成对出现。

协方差矩阵 Σ

σ_1^2	σ_{12}	σ_{13}
σ_{12}	σ_2^2	σ_{23}
σ_{13}	σ_{23}	σ_3^2

 $\longrightarrow$ 右乘 w :
逐行做点积

图 12.2: 协方差矩阵关于主对角线对称。先右乘 w , 再左乘 w^T , 就是将所有资产对的风险贡献汇总。

12.7 最小方差组合的公式为什么会出现逆矩阵

现在考虑 n 个资产。只要求权重之和为 1, 暂不限制做空。目标是让

$$\min_w w^T \Sigma w \quad \text{且} \quad \mathbf{1}^T w = 1.$$

引入拉格朗日乘子 λ , 构造 $L(w, \lambda) = w^T \Sigma w - \lambda(\mathbf{1}^T w - 1)$ 。假设 Σ 对称且正定, 则对向量 w 求梯度得

$$\nabla_w L = 2\Sigma w - \lambda \mathbf{1} = 0.$$

把未知的 w 留在左边:

$$\Sigma w = \frac{\lambda}{2} \mathbf{1} \implies w = \frac{\lambda}{2} \Sigma^{-1} \mathbf{1}.$$

权重还必须加总为 1, 所以左乘 $\mathbf{1}^T$:

$$1 = \mathbf{1}^T w = \frac{\lambda}{2} \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}.$$

因而 $\lambda/2 = 1/(\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1})$, 最终得到

$$w_{\text{GMV}} = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}}.$$

逆矩阵不是金融学任意规定的对象, 它是解线性方程 $\Sigma w = c\mathbf{1}$ 时自然出现的计算工具。如果 Σ 奇异, 或题目要求不得做空、权重有上界, 这个无约束闭式公式就未必直接适用。

两资产小例子，把抽象公式退回一元二次式

设第一只股票波动率 20%，第二只股票 30%，相关系数 0.25。协方差 = $0.2 \times 0.3 \times 0.25 = 0.015$ 。第一只股票权重为 w ，第二只为 $1 - w$ ，则

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= 0.04w^2 + 0.09(1-w)^2 + 0.03w(1-w) \\ &= 0.10w^2 - 0.15w + 0.09.\end{aligned}$$

求导令零： $0.20w - 0.15 = 0$ ，得到 $w = 0.75$ 。于是第二只股票权重 0.25，组合方差

$$0.10(0.75)^2 - 0.15(0.75) + 0.09 = 0.03375,$$

组合波动率为 $\sqrt{0.03375} \approx 18.37\%$ 。

12.8 风险贡献怎样加回组合总风险

记 $\sigma_p = \sqrt{w^T \Sigma w}$ 。对权重 w_i 求导，得到边际风险贡献

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial w_i} = \frac{(\Sigma w)_i}{\sigma_p}.$$

因为 σ_p 是权重的一次齐次函数，所以各资产的欧拉风险贡献为

$$RC_i = w_i \frac{(\Sigma w)_i}{\sigma_p}, \quad \sum_i RC_i = \sigma_p.$$

以前文三资产数值 $w = (0.5, 0.3, 0.2)$ 、 $\Sigma w = (0.023, 0.0356, 0.0374)^T$ 为例： $\sigma_p \approx 0.172221$ ，依次得到

$$RC_1 \approx 0.066775, \quad RC_2 \approx 0.062013, \quad RC_3 \approx 0.043433.$$

三者相加约为 0.172221。权重为 20% 的第三只资产承担了约 25.2% 的组合波动风险，这正是风险贡献与资金比例不同的具体表现。

专题 D

矩阵不是缩写：从现金收益到组合优化

组合方差公式 $w^T \Sigma w$ 容易给人造成一种错觉：仿佛风险突然变成了矩阵计算。实际并不是。它来自最初两个随机收益相加后平方的普通代数。

D.1 两项先展开，再推到三项

两资产组合收益 $R_p = w_1 R_1 + w_2 R_2$ ，减去均值后平方，出现三类项：

$$\text{Var}(R_p) = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_{12}.$$

三资产时，先写出

$$(w_1 X_1 + w_2 X_2 + w_3 X_3)^2 = \sum_{i=1}^3 w_i^2 X_i^2 + 2 \sum_{i < j} w_i w_j X_i X_j.$$

取期望后就是三项自身方差、三对协方差，恰好等于 $w^T \Sigma w$ 。

D.2 把矩阵乘法还原成九次乘法

设

$$\Sigma = \begin{pmatrix} .04 & .01 & 0 \\ .01 & .09 & .018 \\ 0 & .018 & .16 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} .5 \\ .3 \\ .2 \end{pmatrix}.$$

首先每一行与权重做点积：

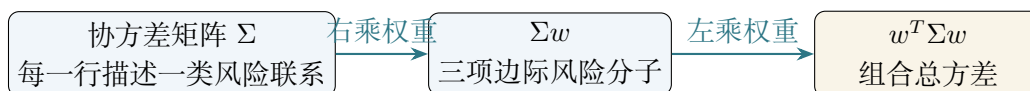
$$(\Sigma w)_1 = .04(.5) + .01(.3) + 0(.2) = .023,$$

$$(\Sigma w)_2 = .01(.5) + .09(.3) + .018(.2) = .0356,$$

$$(\Sigma w)_3 = 0(.5) + .018(.3) + .16(.2) = .0374.$$

然后再与原来的权重做点积：

$$\sigma_p^2 = .5(.023) + .3(.0356) + .2(.0374) = .02966, \quad \sigma_p = \sqrt{.02966} = 17.222\%.$$



D.3 三资产 GMV 的拉格朗日方法

若只要求权重和为 1，且协方差矩阵正定，最小方差问题为

$$\min_w w^T \Sigma w, \quad \mathbf{1}^T w = 1.$$

引入乘子 λ ： $L = w^T \Sigma w - \lambda(\mathbf{1}^T w - 1)$ 。注意 Σ 对称时

$$\nabla_w (w^T \Sigma w) = 2\Sigma w.$$

一阶条件为 $2\Sigma w - \lambda \mathbf{1} = 0$ ，从而 $w = (\lambda/2)\Sigma^{-1}\mathbf{1}$ 。再代入约束

$$\frac{\lambda}{2} \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1} = 1 \quad \Rightarrow \quad w^{\text{GMV}} = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}}.$$

这里不能把矩阵当成数字随意移项：我们是左乘逆矩阵，因为 $\Sigma^{-1}\Sigma = I$ 。

D.4 只给对角协方差，亲自算出权重

假设三项资产互不相关，方差为 0.04, 0.09, 0.16。这时 $\Sigma^{-1} = \text{diag}(25, 11.1111, 6.25)$ 。计算分母 $25 + 11.1111 + 6.25 = 42.3611$ 。于是

$$w = (25, 11.1111, 6.25)/42.3611 \approx (0.5902, 0.2623, 0.1475).$$

各项和为 1。波动率较低的第一项拿到最多权重，因为对于互不相关资产，GMV 权重与方差的倒数成正比。

D.5 为什么风险贡献能加回总风险

$\sigma_p = \sqrt{w^T \Sigma w}$ 对 w_i 求导：

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial w_i} = \frac{(\Sigma w)_i}{\sigma_p}.$$

因此第 i 项总波动风险贡献 $RC_i = w_i(\Sigma w)_i/\sigma_p$ 。将三项加起来：

$$\sum_i RC_i = \frac{\sum_i w_i(\Sigma w)_i}{\sigma_p} = \frac{w^T \Sigma w}{\sigma_p} = \sigma_p.$$

这是应当写进代码自动测试的一条恒等式。

Zoey Lin

4 矩阵乘法怎样产生最小方差权重

4.1 用三资产例子追踪每个矩阵位置

设三个资产的协方差矩阵为

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.01 & 0 \\ 0.01 & 0.09 & 0 \\ 0 & 0 & 0.16 \end{pmatrix}.$$

对角线是各资产方差。两个非零对角线外元素 0.01 反映资产一和资产二的协方差；资产三在这个例子中与前两个资产不相关。假设权重向量为 $w = (w_1, w_2, w_3)^T$ ，权重和等于 1。组合方差写成

$$w^T \Sigma w = 0.04w_1^2 + 0.09w_2^2 + 0.16w_3^2 + 0.02w_1w_2.$$

交叉项前的 0.02 来自 σ_{12} 与 σ_{21} 两项相加，因此只写一次 $0.01w_1w_2$ 会少算一半协方差风险。

4.2 拉格朗日乘子的两条方程

在没有做空限制、且仅要求权重和为 1 的条件下，求解

$$\min_w w^T \Sigma w \quad \text{使得} \quad \mathbf{1}^T w = 1.$$

引入乘子 λ ，构造 $L(w, \lambda) = w^T \Sigma w - \lambda(\mathbf{1}^T w - 1)$ 。由于 Σ 对称， $\nabla_w(w^T \Sigma w) = 2\Sigma w$ ，所以一阶条件为

$$2\Sigma w - \lambda \mathbf{1} = 0, \quad \mathbf{1}^T w = 1.$$

记 $a = \Sigma^{-1}\mathbf{1}$ 。第一式意味着 $w = (\lambda/2)a$ ；第二式要求 $\lambda/2 = 1/(\mathbf{1}^T a)$ 。所以

$$w_{\text{GMV}} = \frac{\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1}\mathbf{1}}.$$

还要算出这个公式中的矩阵逆才能真正得到权重。

4.3 一步一步解出投资组合的矩阵方程

不必先写逆矩阵。直接设 $a = (a_1, a_2, a_3)^T$ ，求解 $\Sigma a = \mathbf{1}$ ，

$$\begin{cases} 0.04a_1 + 0.01a_2 = 1, \\ 0.01a_1 + 0.09a_2 = 1, \\ 0.16a_3 = 1. \end{cases}$$

第三式直接给出 $a_3 = 6.25$ 。把第一式乘以 4，

$$0.16a_1 + 0.04a_2 = 4.$$

再把第二式乘以 16,

$$0.16a_1 + 1.44a_2 = 16.$$

相减得到 $1.40a_2 = 12$, 于是 $a_2 = 8.571429$ 。代回第一式,

$$a_1 = \frac{1 - 0.01 \times 8.571429}{0.04} = 22.857143.$$

因此

$$a = \begin{pmatrix} 22.857143 \\ 8.571429 \\ 6.25 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1}^T a = 37.678572,$$

最后得到

$$w_{\text{GMV}} = \begin{pmatrix} 0.606635 \\ 0.227488 \\ 0.165877 \end{pmatrix}.$$

三项加起来为 1。组合方差为 $1/(\mathbf{1}^T a) \approx 0.0265403$, 组合波动率约 16.2912%。

4.4 对最优性再作一次数值检查

把权重代回原方差矩阵, 可算出

$$\Sigma w \approx \begin{pmatrix} 0.0265403 \\ 0.0265403 \\ 0.0265403 \end{pmatrix}.$$

三个分量相同, 符合 $\Sigma w = (\lambda/2)\mathbf{1}$ 的一阶条件。至此, 最优权重、预算约束和一阶条件都能够用数字独立检查。

三资产最小方差权重的由来

令三资产的协方差矩阵为正定对角阵

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & 0.09 & 0 \\ 0 & 0 & 0.16 \end{pmatrix}.$$

考虑权重向量 $w = (w_1, w_2, w_3)^\top$ ，预算约束为 $w_1 + w_2 + w_3 = 1$ 。组合方差逐项展开为

$$\sigma_p^2 = w^\top \Sigma w = 0.04w_1^2 + 0.09w_2^2 + 0.16w_3^2.$$

引入乘子 λ ，最小化

$$L(w, \lambda) = \frac{1}{2}w^\top \Sigma w - \lambda(\mathbf{1}^\top w - 1).$$

对三个权重求导，分别得到 $0.04w_1 = \lambda$ 、 $0.09w_2 = \lambda$ 、 $0.16w_3 = \lambda$ ，于是

$$w_1 = 25\lambda, \quad w_2 = \frac{100}{9}\lambda, \quad w_3 = 6.25\lambda.$$

由约束 $\lambda(25 + 11.111111 + 6.25) = 1$ ，可求得

$$w = (0.590164, 0.262295, 0.147541)^\top.$$

直接回代后，方差约为 0.0236066，波动率约为 15.364%。其权重对单一资产方差成反比，依赖于此处预先假设的零相关性。

协方差不为零时怎么办

当 Σ 含有非零交叉项且可逆，联立偏导可写成 $\Sigma w = \lambda \mathbf{1}$ 。解这个线性系统即可得到

$$w_{\text{GMV}} = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1}}.$$

这条公式建立在允许正负权重、只约束总权重为 1 且 Σ 正定的条件下。若要求 $w_i \geq 0$ 或限定行业暴露，需加入不等式约束，用二次规划求解。

直接检验 $\mathbf{1}^\top w = 1$ ，并把权重代回 $w^\top \Sigma w$ 。若二者都成立，只能说明数值没有明显笔误；要确定是最小值，还需利用协方差矩阵的正定性。

带协方差的最小风险组合

在只含有两个资产的情况下，权重 w 和 $1-w$ 的组合方差为

$$V(w) = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{12}.$$

假设 $\sigma_1 = 20\%$ 、 $\sigma_2 = 30\%$ ，相关系数为 0.25，则 $\sigma_{12} = 0.2(0.3)(0.25) = 0.015$ 。代入并逐项展开，

$$\begin{aligned} V(w) &= 0.04w^2 + 0.09(1-2w+w^2) + 0.03(w-w^2) \\ &= 0.10w^2 - 0.15w + 0.09. \end{aligned}$$

令导数 $V'(w) = 0.20w - 0.15 = 0$ ，得到 $w = 0.75$ 。二阶导数 $V''(w) = 0.20 > 0$ ，因此确实取到最小值。最小方差为

$$0.10(0.75)^2 - 0.15(0.75) + 0.09 = 0.03375, \quad \sigma_p = \sqrt{0.03375} \approx 18.371\%.$$

三个资产时，公式中的逆矩阵可以替换为求解线性方程

考虑协方差矩阵

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.01 & 0 \\ 0.01 & 0.09 & 0 \\ 0 & 0 & 0.16 \end{pmatrix}.$$

最小化 $\frac{1}{2}w^T\Sigma w$ ，并要求 $\mathbf{1}^T w = 1$ 。设拉格朗日乘子为 λ ，一阶条件为 $\Sigma w = \lambda \mathbf{1}$ 。先求 $\Sigma x = \mathbf{1}$ ，有

$$\begin{cases} 0.04x_1 + 0.01x_2 = 1, \\ 0.01x_1 + 0.09x_2 = 1, \\ 0.16x_3 = 1. \end{cases}$$

用第一式乘 9 并减去第二式，可消去 x_2 ，于是 $0.35x_1 = 8$ ，求得 $x_1 = 160/7 \approx 22.857143$ 。再代回第一式， $0.01x_2 = 1 - 0.04(160/7) = 3/35$ ，所以 $x_2 = 60/7 \approx 8.571429$ 。最后 $x_3 = 6.25$ 。

$$\sum_i x_i = 37.67857143, \quad w = (0.6066351, 0.2274882, 0.1658768)^T.$$

把权重代回 $w^T\Sigma w$ ，得到约 0.0265403，波动率 16.2912%。预算条件 $\sum_i w_i = 1$ 也得到满足。

正定性在解答中的作用

最小方差组合的导数等于零，尚不足以说明它就是最小值。此处前两项组成的主子式为 $0.04(0.09) - 0.01^2 = 0.0035 > 0$ ，第三项方差 $0.16 > 0$ ，从而 Σ 正定。对任意非零权重扰动 h 都有 $h^T\Sigma h > 0$ ，保证目标函数严格凸。若还要求不卖空，则须另外检查求得的三个权重是否均非负。

第五部分

离散世界的期权定价

Zoey Lin

第 13 章

远期、期货与 Put-Call Parity

远期价格来自“今天买还是未来买必须等价”

远期合约的定价

在相同交割日期取得相同标的资产的两种交易策略，应具有一致的初始成本。即期购买并融资持有可以复制远期合约的到期支付。两种策略的价格关系由无套利条件确定。

Put-Call Parity 用图景记

$C + Ke^{-rT}$ 与 $P + S_0$ 在到期时无论股价高低，payoff 都一样。因此今天价格也必须一样：

$$C + Ke^{-rT} = P + S_0.$$

不要死背左右顺序，记住“Call + 现金”和“Put + 股票”在到期时完全复制彼此。

13.1 无股息资产远期价格

例题

若现价 $S_0 = 100$ ，无风险利率 $r = 5\%$ ，期限 1 年，则公平远期价

$$F_0 = S_0 e^{rT} = 100e^{0.05} = 105.127.$$

若用年复利，也可近似写成 $100(1.05) = 105$ 。连续复利略高一点。

13.2 Put-Call Parity

例题

无股息情形：

$$C - P = S_0 - Ke^{-rT}.$$

例如 $S_0 = 100, K = 105, r = 4\%, T = 0.5$, 则

$$Ke^{-rT} = 105e^{-0.02} = 102.920.$$

因此

$$C - P = 100 - 102.920 = -2.920.$$

若市场上看到 $C = 5.50, P = 7.80$, 则 $C - P = -2.30$, 偏离 -2.92 , 可能存在套利或报价误差。

13.3 两步树的每个节点：先算股票，再算期权，最后倒着折现

说明

两步树总共有 4 条路径，但由于“先涨后跌”和“先跌后涨”到达同一价格，最终只有 3 个价格节点。不要着急背一整串公式：先往右走造出未来，再往左走计算今天。

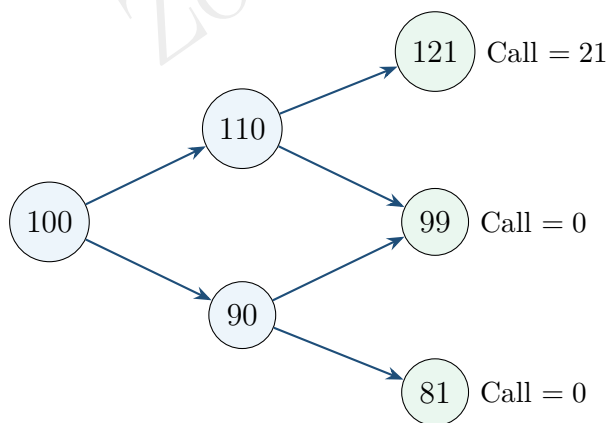


图13.1 二叉树到期支付及风险中性回溯顺序。

一棵完全算到底的 CRR 风格小树

两期，每期 $u = 1.1, d = 0.9$ ，每期无风险增长因子是 1.02。于是风险中性概率

$$q = \frac{1.02 - 0.90}{1.10 - 0.90} = \frac{0.12}{0.20} = 0.6.$$

右端 payoff: $V_{uu} = 21, V_{ud} = 0, V_{dd} = 0$ 。中间“上涨”节点:

$$V_u = \frac{0.6 \times 21 + 0.4 \times 0}{1.02} = 12.35294.$$

中间“下跌”节点:

$$V_d = \frac{0.6 \times 0 + 0.4 \times 0}{1.02} = 0.$$

回到今天:

$$V_0 = \frac{0.6 \times 12.35294 + 0.4 \times 0}{1.02} \approx 7.26644.$$

结果核对

也可以直接列 4 条路径：只有 UU 路径 payoff 为 21，其风险中性概率为 $0.6^2 = 0.36$ 。所以 $V_0 = 21 \times 0.36 / 1.02^2 \approx 7.26644$ ，与逐节点回溯一致。

13.4 看懂到期收益：Call、Put 的两条折线

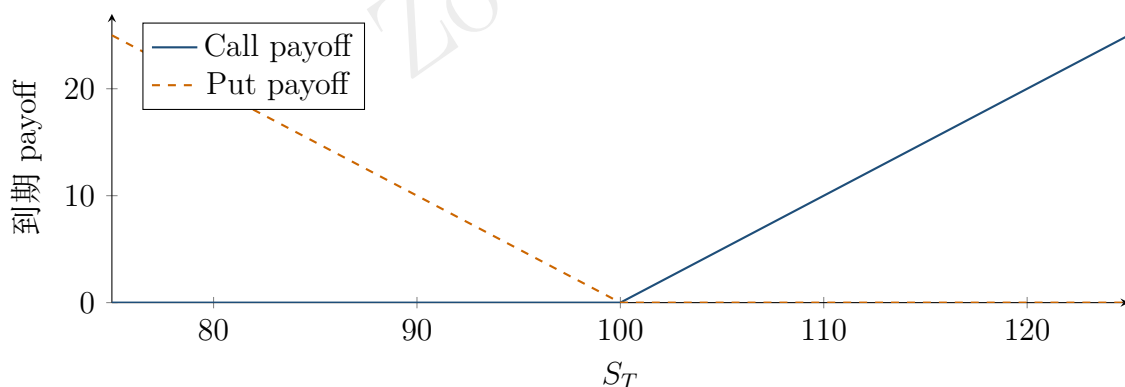


图13.2 欧式看涨与看跌期权的到期支付。横轴为到期股价。

两条 payoff 逐状态算给你看

取 $K = 100$ ，若到期股价是 90：

$$C_T = \max(90 - 100, 0) = 0, \quad P_T = \max(100 - 90, 0) = 10.$$

若到期股价是 110：

$$C_T = \max(110 - 100, 0) = 10, \quad P_T = \max(100 - 110, 0) = 0.$$

此图不减权利金：如果想画持有期权的**净利润**，还需要扣去最初购买权利金的未来价值（或统一折回同一个时间点）。

Zoey Lin

第 14 章

一步复制与二叉树

复制组合就是“造一个一模一样的东西”

复制组合的构造

若股票与无风险资产组成的投资组合能够在每个终端状态复制期权支付，该组合的初始价值就是期权价格。复制关系须逐个状态验证，随后由线性方程求出股票头寸和借贷金额。

为什么两状态只需要两种资产

上态和下态一共有两个约束：上态要匹配一次、下态也要匹配一次。我们有两个未知数：股票仓位 Δ 和现金仓位 B 。两个方程解两个未知数，刚好可以精确复制。

相关知识

这就是“市场完备性”的最小原型：状态数与独立交易工具数足够匹配时，衍生品可以被唯一复制和定价。

14.1 一步二叉树复制

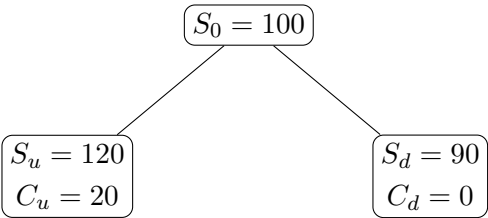


图14.1 股票头寸与无风险资产复制两个终端状态的期权支付。

例题

设看涨期权执行价为 100，则上态 payoff $C_u = 20$ ，下态 payoff $C_d = 0$ 。复制方程：

$$120\Delta + B(1+r) = 20,$$

$$90\Delta + B(1+r) = 0.$$

两式相减：

$$30\Delta = 20 \Rightarrow \Delta = \frac{2}{3}.$$

代入下式，若 $r = 5\%$ ：

$$90 \times \frac{2}{3} + 1.05B = 0 \Rightarrow 60 + 1.05B = 0 \Rightarrow B = -57.1429.$$

因此今天期权价格

$$C_0 = \Delta S_0 + B = \frac{2}{3} \times 100 - 57.1429 = 9.5238.$$

14.2 风险中性概率

例题

若用风险中性概率 q ，则

$$q = \frac{R - d}{u - d} = \frac{1.05 - 0.9}{1.2 - 0.9} = 0.5.$$

于是

$$C_0 = e^{-r\Delta t}[qC_u + (1-q)C_d] = \frac{1}{1.05}(0.5 \times 20) = 9.5238.$$

与复制组合法一致。

14.3 两步二叉树：完整向后回溯一次

例题

设 $S_0 = 100, u = 1.1, d = 0.9, r = 0$, 执行价 $K = 100$, 两期欧式看涨。

两期后股价: 121, 99, 81。对应 payoff: 21, 0, 0。

因为 $r = 0$, 风险中性概率

$$q = \frac{1 - d}{u - d} = \frac{0.1}{0.2} = 0.5.$$

第一期上节点价值: $V_u = 0.5 \times 21 + 0.5 \times 0 = 10.5$ 。

第一期下节点价值: $V_d = 0$ 。

回到今天:

$$V_0 = 0.5 \times 10.5 + 0.5 \times 0 = 5.25.$$

补充观察

二叉树的动作永远不变: 先把最末端 payoff 写出来, 再一层一层向前做“风险中性平均 + 贴现”。

14.4 同一棵树算美式 Put: 为什么在下跌节点提前执行

说明

美式看跌期权和欧式看跌期权差别只有一个动作: 到每个**非到期节点**, 多做一次 $\max(\text{立即执行}, \text{继续持有})$ 。少做这个动作, 算出来的就不是美式价格。

继续沿用上一章的价格树，改成执行价为 100 的看跌期权

末端价格 $S_{uu} = 121, S_{ud} = 99, S_{dd} = 81$ ，所以到期 Put payoff 为

$$(0, 1, 19).$$

上涨节点 $S_u = 110$ ：立即行权 $\max(100 - 110, 0) = 0$ ；继续价值

$$\frac{0.6 \times 0 + 0.4 \times 1}{1.02} = 0.39216.$$

所以选择继续， $V_u = 0.39216$ 。下跌节点 $S_d = 90$ ：立即行权 $100 - 90 = 10$ ；继续价值

$$\frac{0.6 \times 1 + 0.4 \times 19}{1.02} = \frac{0.6 + 7.6}{1.02} = 8.03922.$$

所以应立即执行， $V_d = 10$ 。今天 $S_0 = 100$ ：立即行权 0；继续价值

$$\frac{0.6 \times 0.39216 + 0.4 \times 10}{1.02} \approx 4.15225.$$

因此美式 Put 价格约 4.15225。

结果核对

同参数欧式 Put 在“下跌节点”没有行权选择，价值是 8.03922，而美式允许取 10。因而同条件下美式 Put 不应便宜于欧式 Put。

14.5 从复制组合推导风险中性概率

先设一个只有上、下两个状态的一期市场。股票现在价格 100，下一期要么涨到 120，要么跌到 90。银行账户在同一期从 1 增长到 $R = 1.05$ 。这时风险中性上行权重满足

$$100 = \frac{q \times 120 + (1 - q) \times 90}{1.05}.$$

移项：

$$105 = 90 + 30q, \quad q = \frac{15}{30} = 0.5.$$

假设我们关心执行价 100 的看涨期权，其两种终值是 20, 0。用刚求出的 q 定价：

$$C_0 = \frac{0.5 \times 20 + 0.5 \times 0}{1.05} = 9.5238.$$

这与前面复制组合持有 $2/3$ 股股票、借入约 57.1429 元所得的成本恰好相同。风险中性权重 $q = 0.5$ 不是说股价未来有 50% 的真实上涨概率，而是无套利约束推出的定价权重。

条件 $d < R < u$ 在这里同样重要： $0.9 < 1.05 < 1.2$ 。若 $R \geq u$ ，股票每个状态增长都赶不上银行账户，却仍需要支付同样的当前价格，就会出现简单的无套利矛盾； $R \leq d$ 时则反过来。

14.6 一棵两步树如何反过来计算美式看跌

仍令 $u = 1.2, d = 0.9, R = 1.05$ ，每期风险中性上行权重为 $q = 0.5$ 。两期后股票可能处在

$$S_{uu} = 100 \times 1.2^2 = 144, \quad S_{ud} = 100 \times 1.2 \times 0.9 = 108, \quad S_{dd} = 100 \times 0.9^2 = 81.$$

如果执行价 $K = 100$ ，看跌期权三种终值分别是 0, 0, 19。

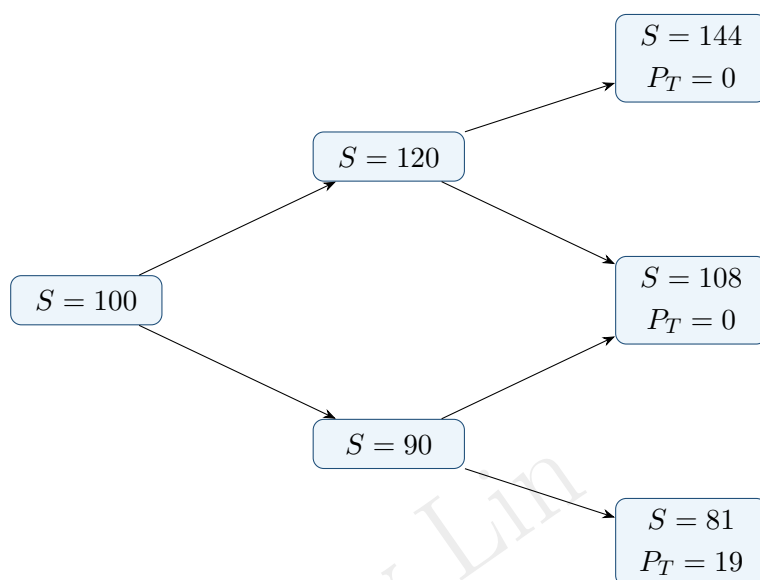


图 14.2: 美式看跌的回溯次序与树上的股票上涨方向相反。

从最后一期回溯到第一期。上节点 $S = 120$ 的继续价值为

$$V_u^{\text{cont}} = \frac{0.5 \times 0 + 0.5 \times 0}{1.05} = 0,$$

立即行权价值也为 $\max(100 - 120, 0) = 0$ ，所以价值是 0。下节点 $S = 90$ 的继续价值却是

$$V_d^{\text{cont}} = \frac{0.5 \times 0 + 0.5 \times 19}{1.05} = 9.0476.$$

如果此刻立即行权，则可以拿到 $100 - 90 = 10$ 。由于 $10 > 9.0476$ ，理性持有人会提前执行，因此下节点价值是 10 而非 9.0476。今天的美式看跌价值：

$$P_0^{\text{Am}} = \frac{0.5 \times 0 + 0.5 \times 10}{1.05} = 4.7619.$$

欧式看跌不能在第一期执行，同样一棵树得到

$$P_0^{\text{Eu}} = \frac{0.5 \times 0 + 0.5 \times 9.0476}{1.05} \approx 4.3084.$$

它们的差额约为 0.4535，代表这一离散模型里的提前行权权利的价值。这个结论不能不加条件地推广到所有美式期权：例如在不付股息的标准 Black-Scholes 模型下，美式看涨期权通常没有提前行权的经济优势。

第 15 章

美式期权：为什么要比较“继续价值”和“立即执行”

美式期权比欧式多了一个选择权

美式期权的行权时点

美式期权允许在到期之前行权。因此回溯定价时，每个节点都须比较立即行权所得的支付与继续持有的价值，并取较大者。这个节点选择是美式定价的重要步骤。

节点决策的固定模板

每个节点只做两件事：

1. 算立即执行价值，例如 put 为 $K - S$ ；
2. 算继续持有价值，即下一期价值的风险中性贴现期望。

节点价值就是两者最大值。

如果立即执行 8，继续价值 6.7，那么该节点价值就是 8，并记录“提前执行”。

例题

对美式看跌，每个节点都要算：

1. 立即执行价值 $K - S$ ；
2. 继续持有价值 $e^{-r\Delta t}[qV_u + (1 - q)V_d]$ ；
3. 取两者较大值。

这就是美式与欧式最大的算法差异。

15.1 一个两步美式 Put 的节点判断

例题

设某节点股价 $S = 80$ 、执行价 $K = 100$ 。立即执行价值

$$100 - 80 = 20.$$

假设从该节点继续持有的风险中性贴现价值算出为 18.4，那么美式价值应取

$$\max(20, 18.4) = 20.$$

也就是说此节点应提前执行。

说明

美式期权的“难”不是公式更长，而是每个节点多了一个选择。你可以把它理解成：先问继续持有值多少，再问现在兑现值多少，然后选更大的。

15.2 两期美式看跌：整棵树只算一次，不跳节点

股价今天为 100，每期要么上涨 20%，要么下跌 20%；两期后到期。无风险资产每期增长 2%，执行价 100。令

$$u = 1.20, \quad d = 0.80, \quad R = 1.02, \quad K = 100.$$

风险中性上涨概率不是猜出来的，而是令股票在 Q 下的期望增长率等于无风险增长率：

$$qu + (1 - q)d = R \Rightarrow q = \frac{1.02 - 0.80}{1.20 - 0.80} = 0.55.$$

于是下跌概率为 0.45。股价树及末端欧式看跌的收益如图：

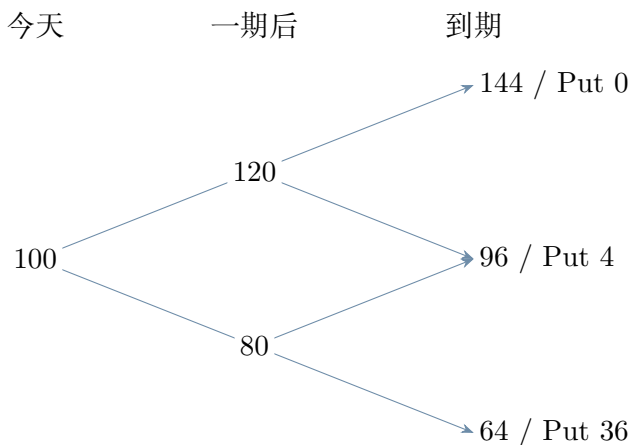


图 15.1: 末端三个不同股价对应看跌 payoff 为 0、4、36。

现在从倒数第二层开始。上方节点股价是 120：

$$\text{立即执行} = \max(100 - 120, 0) = 0,$$

$$\text{继续持有} = \frac{0.55 \times 0 + 0.45 \times 4}{1.02} = \frac{1.8}{1.02} = 1.7647.$$

显然不执行，节点价值为 1.7647。下方节点股价是 80：

$$\text{立即执行} = 100 - 80 = 20,$$

$$\text{继续持有} = \frac{0.55 \times 4 + 0.45 \times 36}{1.02} = \frac{18.4}{1.02} = 18.0392.$$

此时提前执行更值钱，节点价值取 20。最后退回今天：

$$V_0 = \max\left(0, \frac{0.55 \times 1.7647 + 0.45 \times 20}{1.02}\right) \approx 9.7751.$$

对照：如果只能到期执行

欧式看跌不能在价格 80 的节点提前执行，只能使用继续价值 18.0392。今天的欧式价格约为

$$V_0^E = \frac{0.55 \times 1.7647 + 0.45 \times 18.0392}{1.02} \approx 8.9100.$$

这与美式价格相比少了约 0.865 元。两棵树的差别仅在于：美式每个节点可以再比较一次 $\max(K - S, \text{继续持有})$ 。

15.3 为什么树的算法与复制组合并不矛盾

一步二叉树的两种算法分别是：使用股票与债券复制，或者使用风险中性概率折现。它们产生同一个价格，是因为两个状态的未来收益都已由两种可交易资产跨状态复制。当状态数超过独立交易工具数时，这种精确复制未必存在。因而“风险中性概率”不是一张任何市场都可以随意套用的表，而是由无套利和可复制性条件共同约束出来的定价对象。

15.4 在两状态市场里，概率为什么可以由价格推出来

假设一只股票今天值 100 元，下一期只有两个可能结果：涨到 120，或者跌到 90。看涨期权执行价为 100，因此终点收益是 20 或 0。若无风险账户在这一期增长 5%，我们已经可以用股票和无风险账户复制期权。

持有 Δ 股股票，并把 B 元投入无风险账户（允许 B 为负，此时表示借款）。未来上、下两个状态的组合价值分别为

$$120\Delta + 1.05B, \quad 90\Delta + 1.05B.$$

要求它们与期权收益完全相同：

$$\begin{cases} 120\Delta + 1.05B = 20, \\ 90\Delta + 1.05B = 0. \end{cases}$$

两式相减后, 无风险账户被消掉, 得到 $30\Delta = 20$, 也就是 $\Delta = 2/3$ 。代回第二式: $60 + 1.05B = 0$, 所以 $B = -57.142857$ 。组合今天成本

$$C_0 = 100 \times \frac{2}{3} - 57.142857 = \boxed{9.523810}.$$

我们也可以换一种排列写同一结果。令上涨乘数为 $u = 1.2$, 下跌乘数为 $d = 0.9$, 无风险增长因子为 $R = 1.05$ 。所谓风险中性概率 q 是由

$$qu + (1 - q)d = R$$

求出的权重, 它使股票在一个时期后的**风险中性平均增长因子**等于无风险增长因子。解得

$$q = \frac{R - d}{u - d} = \frac{1.05 - 0.90}{1.20 - 0.90} = \frac{1}{2}.$$

于是

$$C_0 = \frac{q \times 20 + (1 - q) \times 0}{R} = \frac{10}{1.05} = 9.523810.$$

无套利条件要求 $d < R < u$, 才能使 $0 < q < 1$ 。这里的 q 不是投资者对上涨概率的预测, 它是两种复制定价形式之间的代数联系。

15.5 把一期树向前延长: 完整两期回溯

继续使用上面的 u, d, R, q , 两期后的股票价格是

$$S_{uu} = 100(1.2)^2 = 144, \quad S_{ud} = 100(1.2)(0.9) = 108, \quad S_{dd} = 100(0.9)^2 = 81.$$

两期欧式看涨期权、执行价 100 的到期收益分别为 44, 8, 0。树图右端首先写收益, 然后才从右往左贴现。

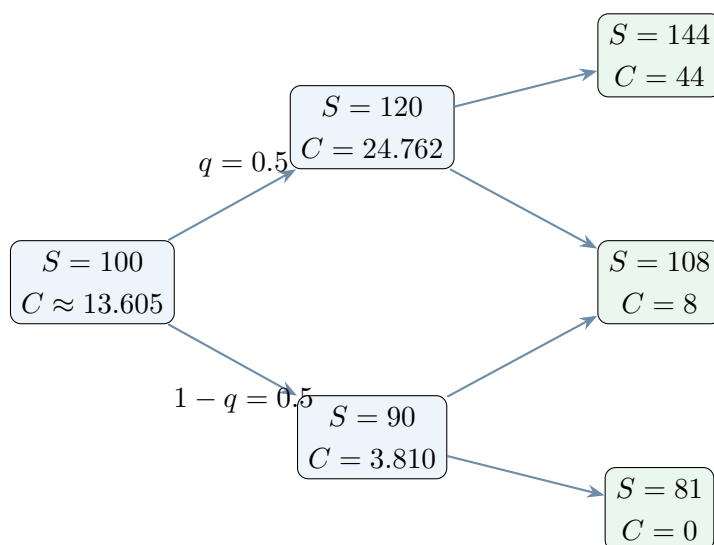


图 15.2: 两期欧式看涨期权: 先算终点收益, 再按风险中性权重逐层折现。

每个非终点节点都代一次数

上涨节点的价值

$$C_u = \frac{0.5 \times 44 + 0.5 \times 8}{1.05} = \frac{26}{1.05} = 24.761905.$$

下跌节点的价值

$$C_d = \frac{0.5 \times 8 + 0.5 \times 0}{1.05} = \frac{4}{1.05} = 3.809524.$$

回到今天：

$$C_0 = \frac{0.5 \times 24.761905 + 0.5 \times 3.809524}{1.05} \approx \boxed{13.605442}.$$

另一路验算是直接对三种终点收益取风险中性期望。两期权重依次是 0.25, 0.5, 0.25, 故

$$C_0 = \frac{0.25(44) + 0.5(8) + 0.25(0)}{1.05^2} = \frac{15}{1.1025} \approx 13.605442.$$

15.6 美式看跌的节点行权条件

换成执行价为 100 的美式看跌期权。在终点 $S = 144, 108, 81$ 时，其立即执行价值为 0, 0, 19。在第一期上涨节点 $S = 120$ ，继续持有价值为零，立即执行价值也为零。

在第一期下跌节点 $S = 90$ ，立即执行可拿到 10；若继续持有，未来两个状态的价值分别为 0 和 19，继续价值只有

$$\frac{0.5(0) + 0.5(19)}{1.05} = 9.047619.$$

因为 $10 > 9.047619$ ，应该在这个下跌节点提前执行。在今天，期权价值因此为

$$V_0 = \frac{0.5(0) + 0.5(10)}{1.05} = \boxed{4.761905}.$$

关键是：只有未来存在行权选择时，才需要在当前节点比较“现在拿钱”和“再等一期的价值”。只回溯期末 payoff 而不检查中间节点，得到的是欧式定价逻辑。

专题 E

复制组合、状态价格与美式行权

有时直接说“风险中性概率”会让读者以为金融数学首先是概率预测。实际上，在一期二状态市场里，可以不作任何真实概率预测，仅靠两状态的复制要求把期权价格算出来。

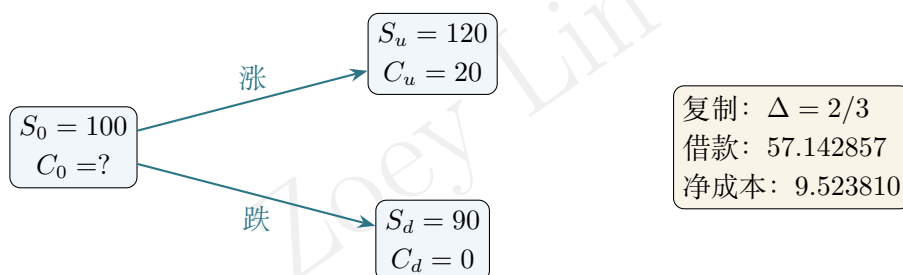
E.1 两状态合约的复制，钱从哪里借来

今天股票价格 $S_0 = 100$ ，一期后可能涨至 120 或跌至 90。无风险账户今天 1 元，下期增长为 1.05。执行价为 100 的看涨期权到期支付 $(20, 0)$ 。设复制组合为 Δ 股股票和今天的银行账户持仓 B ，则

$$\begin{cases} 120\Delta + 1.05B = 20, \\ 90\Delta + 1.05B = 0. \end{cases}$$

两式相减， $30\Delta = 20$ ，所以 $\Delta = 2/3$ 。代入第二式： $60 + 1.05B = 0$ ，因此 $B = -57.142857$ 。负号不是错误，而是借入资金。复制组合今天成本为

$$\frac{2}{3} \times 100 - 57.142857 = \boxed{9.523810}.$$



E.2 风险中性概率是复制解的另一种写法

把上面的两个状态等式代数整理，可以得到 $q = (1.05 - 0.90)/(1.20 - 0.90) = 1/2$ 。价格为

$$C_0 = \frac{qC_u + (1-q)C_d}{1.05} = \frac{0.5 \times 20}{1.05} = 9.523810.$$

这个 q 不是“未来上涨的客观概率一定是 50%”。它是使折现股票价格成为鞅的定价权重。

E.3 两期树：先画终点，再向左计算

仍取 $S_0 = 100, u = 1.1, d = 0.9$ ，每期无风险增长因子为 1，即利率 0，故每期 $q = 0.5$ 。两期后的价格和执行价 100 的看涨 payoff 如下：

$$S_{uu} = 121 \Rightarrow C_{uu} = 21, \quad S_{ud} = 99 \Rightarrow C_{ud} = 0, \quad S_{dd} = 81 \Rightarrow C_{dd} = 0.$$

第一期上节点价值 $C_u = (21 + 0)/2 = 10.5$ ，下节点 $C_d = (0 + 0)/2 = 0$ 。回到今天

$$C_0 = (10.5 + 0)/2 = \boxed{5.25}.$$

这说明多期树没有增加新的定价原理，只是把同一个条件期望不断折回。

E.4 美式 Put 必须每一步比较两种选择

仍用这棵两期树, 考虑执行价为 100 的美式看跌。终点价值分别是 0, 1, 19。第一期股票为 110 时, 立即执行值 0, 继续价值 $(0+1)/2 = 0.5$, 取 0.5。股票为 90 时, 立即执行值 10, 继续价值 $(1+19)/2 = 10$, 两者相等。今天立即执行为 0, 继续价值 $(0.5+10)/2 = 5.25$, 因此 $P_0 = 5.25$ 。

模型假设提醒。 上述例子设每期无风险增长因子为 1; 如果改成正利率, 需要同时重算风险中性概率、贴现因子和所有节点的继续价值。不能只在最后一步多除一次 $1+r$ 。

Zoey Lin

5 两期二叉树中的提前行权

5.1 树的每个节点需要保存什么

从 $S_0 = 100$ 出发, 每期股票可能乘以 $u = 1.2$ 或 $d = 0.8$ 。每期无风险增长因子固定为 $R = 1.05$, 看跌期权执行价 $K = 100$ 。两期后的股票价格为 144、96、64, 期权到期支付分别是 0、4、36。

风险中性上行概率取

$$q = \frac{R - d}{u - d} = \frac{1.05 - 0.8}{1.2 - 0.8} = 0.625, \quad 1 - q = 0.375.$$

此处每期都采用同一增长因子。它和连续复利因子 $e^{r\Delta t}$ 是两种不同口径, 不应混在同一个节点计算中。

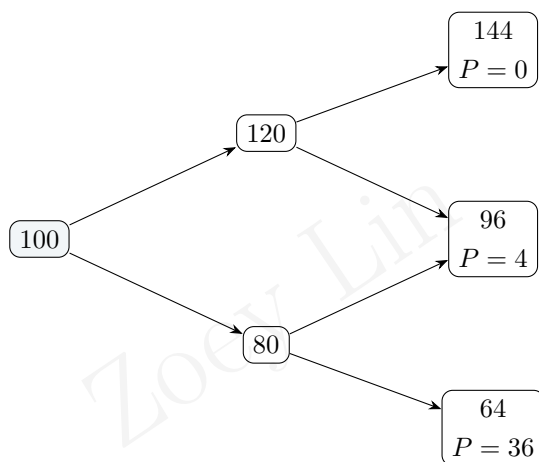


图 5.1: 每个终点先计算看跌期权的支付, 再从右向左回溯。

5.2 在中间两个节点判断是否行权

股价为 120 的上节点, 立即执行价值为 $\max(100 - 120, 0) = 0$ 。持有到下一期的贴现期望为

$$V_u = \frac{0.625 \times 0 + 0.375 \times 4}{1.05} = 1.428571.$$

因此继续持有较好。

股价为 80 的下节点, 立即执行可获得 20。如果继续持有, 价值为

$$V_d^{\text{cont}} = \frac{0.625 \times 4 + 0.375 \times 36}{1.05} = \frac{2.5 + 13.5}{1.05} = 15.238095.$$

比较后选择立即执行, 故 $V_d = 20$ 。这里的“美式”差别具体体现在把 15.238095 改成 20, 并将这个较大值继续向前回溯。

初始节点的立即执行价值为零, 持有价值为

$$V_0 = \frac{0.625 \times 1.428571 + 0.375 \times 20}{1.05} = \frac{0.892857 + 7.5}{1.05} = 7.993197.$$

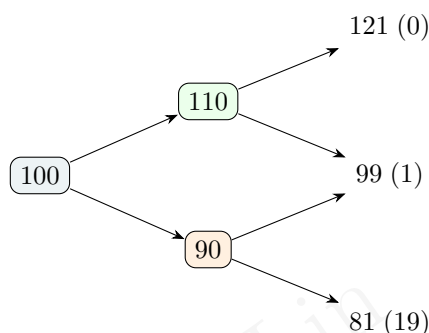
美式期权的逐节点选择

考虑两期股票二叉树，初始价格 100。每期上涨乘数 $u = 1.1$ ，下跌乘数 $d = 0.9$ ，单期无风险增长因子 $R = 1.02$ 。无套利条件 $d < R < u$ 成立，风险中性上涨权重为

$$q_u = \frac{R - d}{u - d} = \frac{1.02 - 0.9}{1.1 - 0.9} = 0.6.$$

执行价为 100 的看跌期权在第二期结束时支付 $\max(100 - S_T, 0)$ 。三种不同终点股价和支付为

S_T	121	99	81
看跌支付	0	1	19



第一期上涨后的节点

这时股票价格 110，立即执行看跌期权所得为 $\max(100 - 110, 0) = 0$ 。继续持有的价值为

$$H_u = \frac{0.6(0) + 0.4(1)}{1.02} = 0.39215686.$$

投资者在两项中取较大者，所以该节点期权价值 $V_u = 0.39215686$ 。

第一期下跌后的节点

股票价格 90，立即执行可得到 10 元。继续持有价值为

$$H_d = \frac{0.6(1) + 0.4(19)}{1.02} = \frac{8.2}{1.02} = 8.03921569.$$

这里 $10 > 8.03921569$ ，最优选择是提前执行，故 $V_d = 10$ 。

回到初始时刻

初始立即行权的收益为零。继续持有的期权价值为

$$V_0 = \frac{0.6V_u + 0.4V_d}{1.02} = \frac{0.6(0.39215686) + 0.4(10)}{1.02} = \boxed{4.15224913}.$$

若只能在到期日执行，相同终点支付的欧式看跌价值为

$$P_0^E = \frac{0.6(0.39215686) + 0.4(8.03921569)}{1.02} = 3.38331411.$$

美式期权多出的 0.76893502 元反映提前行权权利的价值。若股价或利率发生变化，哪一个节点适合提前执行也可能改变，不能仅从某条终点路径得出统一结论。

如果合同禁止提前行权，第二个中间节点只能取 15.238095，今天的欧式价格为

$$V_0^{\text{Eur}} = \frac{0.625 \times 1.428571 + 0.375 \times 15.238095}{1.05} \approx 6.292517.$$

因此此例中提前行权权利增加了约 1.70068 的价值。它来自下节点的选择权，并未改变终点的三个支付数字。

5.3 为什么不付股息的美式看涨通常不应提前行权

对没有分红的股票，设剩余期限为 $\tau > 0$ ，无风险利率 $r \geq 0$ 。由欧式看涨的价格下界，

$$C_{\text{Eur}} \geq S - Ke^{-r\tau} \geq S - K.$$

美式看涨包含欧式看涨的所有到期行权机会，因此它的价格至少不低于欧式看涨。若此时立即执行，获得的净价值只有 $S - K$ ；继续持有期权仍保留股价进一步上涨的权利，并可把执行价的支付推迟到将来。因此在这些假设下，通常不会选择提前行权。

这个结论需要说明条件。若股票支付股息，提前行权可以使持有人在除息日前获得股票，并参与股息分配；若合同具有特殊条款或融资限制，也需要重新检验。美式看跌提前行权的动因又不同，提前取得执行价款的利息价值可能十分重要。

5.4 回到两期树做一次敏感度试验

把每期无风险增长因子从 1.05 改为 1.02，仍取 $u = 1.2$ 、 $d = 0.8$ 。新的风险中性上行概率为

$$q = \frac{1.02 - 0.8}{1.2 - 0.8} = 0.55.$$

上节点的继续价值为 $(0.55 \times 0 + 0.45 \times 4)/1.02 = 1.764706$ ；下节点的继续价值为 $(0.55 \times 4 + 0.45 \times 36)/1.02 = 18.039216$ ，仍低于立即执行价值 20。

今天的美式期权价值因而是

$$V_0 = \frac{0.55 \times 1.764706 + 0.45 \times 20}{1.02} \approx 9.775087.$$

这个例子说明，无风险收益变化同时影响贴现因子与风险中性概率。不能只修改分母，保留旧的 q 不变。

风险中性概率与真实上涨概率

股票现价 100，一期后只有 120 和 90 两种价格。设该期无风险资产增长因子为 $R = 1.05$ 。执行价 100 的欧式看涨到期支付分别为 20 和 0。

$$120\Delta + 1.05B = 20,$$

$$90\Delta + 1.05B = 0.$$

两式相减得到 $\Delta = 2/3$ ；再由第二式得到 $B = -60/1.05 = -57.142857$ 。复制组合在今天的成本为

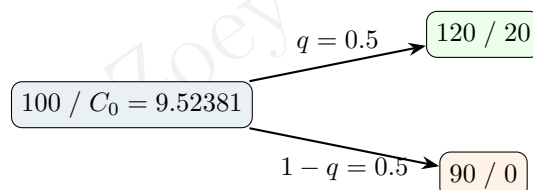
$$C_0 = 100(2/3) - 57.142857 = \boxed{9.523810}.$$

概率由价格关系决定

记上态的定价权重为 q ，无套利要求股票今天的价格等于其未来价格按无风险因子贴现的加权平均，

$$100 = \frac{q(120) + (1-q)90}{1.05}.$$

解得 $q = 0.5$ ，因此期权的贴现期望 $[0.5(20) + 0.5(0)]/1.05$ 也等于 9.523810。这里的 q 为风险中性定价权重。单独的模型没有提供真实上涨概率，不能将两个概率混为一谈。



离散增长因子与连续复利

上式采用的是已经给定的单期增长因子 $R = 1.05$ 。如果题目给出连续复利利率 r 和一期长度 Δt ，增长因子应写成 $e^{r\Delta t}$ 。除非特别说明近似，两个数不能直接互换。无套利还要求 $d < R < u$ ，否则风险中性权重可能落在 $[0, 1]$ 之外。

第六部分

连续时间随机过程

Zoey Lin

第 16 章

布朗运动与二次变差

为什么随机噪声不能按普通微积分处理

布朗运动的增量

普通光滑函数在极短时间 dt 里的变化通常是 $O(dt)$ ；布朗运动的变化却是 $O(\sqrt{dt})$ 。所以它太“粗糙”，普通微积分里会忽略的二阶项，在这里反而会留下来。

用具体数字感受量级

若 $dt = 10^{-4}$ ：

普通漂移项 μdt 是 10^{-4} 量级；

随机项 σdW 中的 dW 是 $\sqrt{10^{-4}} = 10^{-2}$ 量级。

平方以后 $(dW)^2$ 又回到 10^{-4} ，和 dt 同阶，因此不能扔掉。

16.1 为什么是 $\sqrt{dt}$ 而不是 dt

布朗运动的增量

布朗运动在很短时间内的涨跌量级不是 dt ，而是 $\sqrt{dt}$ 。这意味着当 $dt \rightarrow 0$ 时， dW 比 dt 大得多，但 $(dW)^2$ 又恰好和 dt 同阶。

例题

例如 $dt = 0.0001$ ，则

$$\sqrt{dt} = 0.01.$$

所以典型的 dW 量级是 0.01，而不是 0.0001。于是

$$(dW)^2 \sim 0.01^2 = 0.0001 = dt.$$

这就是

$$(dW)^2 = dt$$

在 Itô 演算里会留下来的根本原因。

16.2 随机游走怎样变成布朗运动

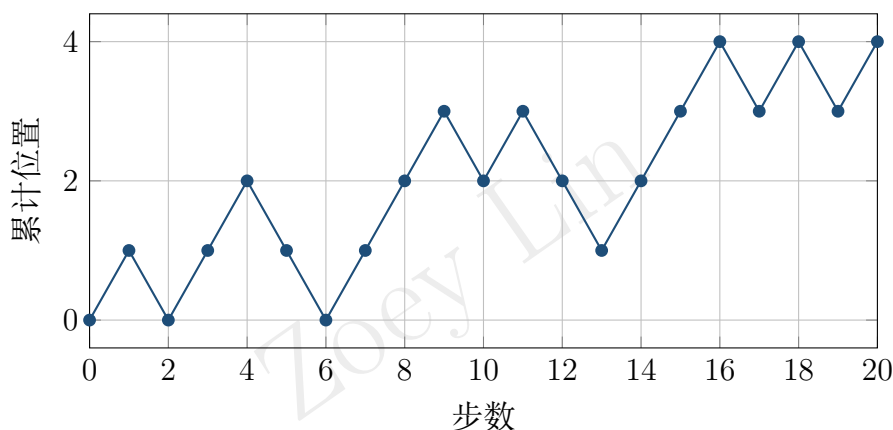


图16.1 对称随机游走及其布朗运动极限。

说明

布朗运动可以先理解成“无限细的随机游走”。你不必一上来接受所有测度论定义；先抓住三点：增量均值为 0、方差等于时间长度、互不重叠时间段的增量独立。

16.3 三格离散路径：Itô 左端点和右端点竟差这么多？

说明

Itô 积分把每一小段里“已经知道的数”拿来乘接下来一段随机变化，所以取左端点。右端点包含未来的信息，不能当成同一个积分。

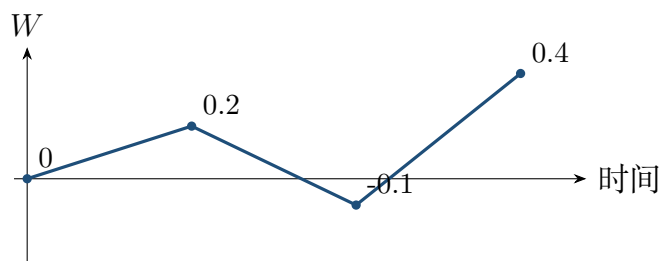


图16.2 一条样本路径的三个离散增量。

每个乘积都展开，亲眼看到“多出来的平方项”

观察到 $W = (0, 0.2, -0.1, 0.4)$ ，所以三次增量是

$$\Delta W_1 = 0.2, \quad \Delta W_2 = -0.3, \quad \Delta W_3 = 0.5.$$

左端点和 (Itô 近似):

$$I_L = 0 \times 0.2 + 0.2 \times (-0.3) + (-0.1) \times 0.5 = -0.11.$$

右端点和:

$$I_R = 0.2 \times 0.2 + (-0.1) \times (-0.3) + 0.4 \times 0.5 = 0.27.$$

两者之差:

$$I_R - I_L = 0.38 = 0.2^2 + (-0.3)^2 + 0.5^2.$$

对任意分割，都有代数恒等式

$$I_L = \frac{1}{2} \left(W_T^2 - W_0^2 - \sum_i (\Delta W_i)^2 \right).$$

本例 $\frac{1}{2}(0.4^2 - 0.38) = -0.11$ ，完全复核。

常见误算

这里有限三步的平方增量和是 0.38，并不等于 T 。只有当分割越来越细时，布朗运动的二次变差和才收敛到 T （通常在概率意义下），进而得到 Itô 公式的 $-T/2$ 修正。

第 17 章

Itô 积分与 Itô 引理

Itô 引理就是“随机版 Taylor 展开”

二阶导数项

布朗运动增量的典型量级为时间步长的平方根。二次增量在极限下仍产生与时间同阶的贡献。因此对随机过程施用 Taylor 展开时，二阶导数项必须保留，由此得到 Itô 修正。

从对数函数慢慢推 GBM

若 $dS = \mu S dt + \sigma S dW$ ，则 $f'(S) = 1/S$ ， $f''(S) = -1/S^2$ 。

Itô 引理：

$$df = f'(S)dS + \frac{1}{2}f''(S)(dS)^2.$$

由于 $(dS)^2 \approx \sigma^2 S^2 dt$ ，所以

$$d \ln S = \frac{1}{S}(\mu S dt + \sigma S dW) - \frac{1}{2} \frac{1}{S^2}(\sigma^2 S^2 dt).$$

逐项约掉 S 后得到

$$d \ln S = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW.$$

17.1 最经典例子： $\int_0^T W_t dW_t$

例题

由 Itô 引理，取 $f(W) = W^2$ ，则

$$d(W_t^2) = 2W_t dW_t + dt.$$

把它移项并积分：

$$\int_0^T W_t dW_t = \frac{1}{2}(W_T^2 - T).$$

若 $T = 1$ 且最后观测到 $W_1 = 0.8$ ，则该积分值

$$\frac{1}{2}(0.64 - 1) = -0.18.$$

17.2 Itô 引理从普通 Taylor 多出来的那一项

例题

普通二元 Taylor 对 $f(t, W_t)$ 写到二阶：

$$df \approx f_t dt + f_W dW + \frac{1}{2} f_{WW} (dW)^2 + f_{tW} dt dW + \frac{1}{2} f_{tt} (dt)^2.$$

现在比较量级：

$$dW \sim \sqrt{dt}, \quad (dW)^2 \sim dt, \quad dt dW \sim dt^{3/2}, \quad (dt)^2 \sim dt^2.$$

保留到 dt 量级时，后两项可以忽略，而 $(dW)^2$ 不能忽略。于是

$$df = f_t dt + f_W dW + \frac{1}{2} f_{WW} dt.$$

这就是一维 Itô 引理最核心的来源。

17.3 GBM 的显式解

例题

若股价满足

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

对 $\ln S_t$ 用 Itô 引理得到

$$d \ln S_t = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t.$$

积分后

$$S_T = S_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma W_T \right].$$

若 $S_0 = 100, \mu = 8\%, \sigma = 20\%, T = 1, W_1 = 0.3$, 则

$$S_1 = 100 \exp[(0.08 - 0.02) + 0.2 \times 0.3] = 100e^{0.12} \approx 112.75.$$

17.4 真实预测和无套利定价：同一条股价方程里的两个任务

概率测度与价格

真实测度 $\mathbb{P}$ 描述资产收益的统计规律。无套利定价使用测度 $\mathbb{Q}$, 使恰当贴现后的可交易资产价格满足鞅条件。两种概率权重用于不同计算目的, 模型参数和适用条件须分别说明。



图17.1 概率测度改变时的路径权重示意。

逐行代数字：从真实漂移到风险中性漂移

假设没有股息， $\mu = 0.10, r = 0.04, \sigma = 0.20$ 。先求市场价格风险：

$$\theta = \frac{\mu - r}{\sigma} = \frac{0.10 - 0.04}{0.20} = 0.30.$$

定义新的布朗运动（相应条件成立时）

$$dW_t^{\mathbb{Q}} = dW_t^{\mathbb{P}} + 0.30 dt.$$

移项得到 $dW_t^{\mathbb{P}} = dW_t^{\mathbb{Q}} - 0.30 dt$ 。把它代入真实世界的股票方程：

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= 0.10 dt + 0.20 dW_t^{\mathbb{P}} \\ &= 0.10 dt + 0.20(dW_t^{\mathbb{Q}} - 0.30 dt) \\ &= (0.10 - 0.06)dt + 0.20 dW_t^{\mathbb{Q}} \\ &= 0.04 dt + 0.20 dW_t^{\mathbb{Q}}. \end{aligned}$$

常见误算

上式不是说真实投资预期收益从 10% 突然下降为 4%；它只是在定价时把贴现资产写成鞅。若存在股息收益率，定价测度下的除息股价漂移通常是 $r - q$ ，不能直接忘掉 q 。

17.5 左端点和右端点为什么会给出不同答案

随机积分 $\int_0^T W_t dW_t$ 容易让人误以为与普通的 $\int x dx$ 一模一样。先不谈极限，取四个离散观测：

$$(W_0, W_1, W_2, W_3) = (0, 0.3, -0.1, 0.5).$$

三段增量分别是 0.3, -0.4, 0.6。使用每一段开始时已知的数值做系数：

$$\sum_{i=0}^2 W_i(W_{i+1} - W_i) = 0 \times 0.3 + 0.3 \times (-0.4) + (-0.1) \times 0.6 = -0.18.$$

如果错误地使用每段结束时的值，结果会变为

$$\sum_{i=0}^2 W_{i+1}(W_{i+1} - W_i) = 0.3 \times 0.3 + (-0.1) \times (-0.4) + 0.5 \times 0.6 = 0.43.$$

两个和差了 0.61，并非偶然：

$$\sum_i (W_{i+1} - W_i)^2 = 0.3^2 + (-0.4)^2 + 0.6^2 = 0.61.$$

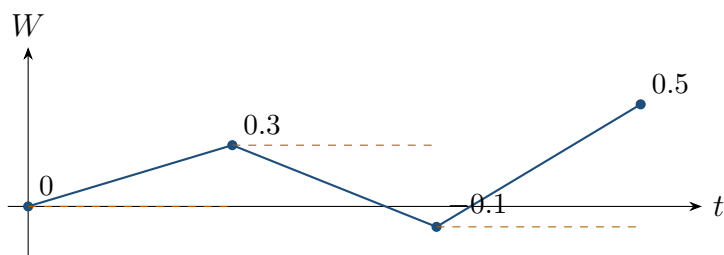


图 17.2: 橙色的分段水平线表示每个区间使用左端点的已知信息。

还有一个不需要积分技巧的恒等式：

$$W_{i+1}^2 - W_i^2 = 2W_i\Delta W_i + (\Delta W_i)^2.$$

把所有小段相加，左边会望远镜式相消：

$$W_T^2 - W_0^2 = 2 \sum_i W_i \Delta W_i + \sum_i (\Delta W_i)^2.$$

由此可见

$$\sum_i W_i \Delta W_i = \frac{1}{2} \left(W_T^2 - W_0^2 - \sum_i (\Delta W_i)^2 \right).$$

上面的粗分段路径就给出 $\frac{1}{2}(0.5^2 - 0.61) = -0.18$ 。当分割越来越细时，布朗运动平方增量之和收敛到时间长度 T ，于是得到 Itô 公式

$$\int_0^T W_t dW_t = \frac{1}{2}(W_T^2 - T).$$

不能把一个粗网格误认成极限

本例仅有三段，因此平方增量和是 0.61，而不是时间长度。Itô 公式中的 T 是网格趋于无穷细时平方变差的极限；对有限网格，不应强行把每次随机增量平方都替换成 Δt 。

17.6 从二阶 Taylor 到 Itô 修正项

取 $f(W_t)$ 。普通 Taylor 的前两阶是

$$\Delta f = f'(W_t)\Delta W_t + \frac{1}{2}f''(W_t)(\Delta W_t)^2 + \text{更高阶}.$$

布朗运动增量的典型量级为 $\sqrt{\Delta t}$ ，所以 $(\Delta W_t)^2$ 的量级是 Δt ：它和漂移项同阶，不能扔掉。这不是凭空制定的一条新微分法则，而是直接来自 Taylor 展开与平方变差的共同作用。

17.7 平方为什么会留下额外一项：先从离散恒等式看起

日常微积分里，我们熟悉 $d(x^2) = 2x dx$ 。但如果 x 是布朗运动 W_t ，这条式子就少了一项。问题并不是微分规则突然改变，而是随机路径的增量尺度与平滑函数不同。

对任意两个普通数 a, b , 总有

$$(a+b)^2 - a^2 = 2ab + b^2.$$

现在把 a 看成某个时刻的布朗位置 W_{t_i} , b 看成下一小段随机增量 $\Delta W_i = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ 。逐段写出

$$W_{t_{i+1}}^2 - W_{t_i}^2 = 2W_{t_i}\Delta W_i + (\Delta W_i)^2.$$

把所有小段加起来, 左边首尾相接, 中间项望远镜式消去:

$$W_T^2 - W_0^2 = 2 \sum_i W_{t_i} \Delta W_i + \sum_i (\Delta W_i)^2.$$

左端点求和在网格越来越密时成为 Itô 积分, 而平方增量的和收敛到 T (依概率)。因此

$$\int_0^T W_t dW_t = \frac{1}{2}(W_T^2 - T).$$

三点离散路径的准确算式

设三点位置依次是 $W_0 = 0$ 、 $W_{1/2} = 0.3$ 、 $W_1 = 0.1$ 。两段增量分别是 0.3 和 -0.2 。左端点和为

$$I_L = 0 \times 0.3 + 0.3 \times (-0.2) = -0.06.$$

平方增量和为 $0.3^2 + (-0.2)^2 = 0.13$, 右端点和为

$$I_R = 0.3 \times 0.3 + 0.1 \times (-0.2) = 0.07.$$

果然 $I_R - I_L = 0.13$ 。而离散恒等式给出

$$I_L = \frac{1}{2}(W_1^2 - W_0^2 - 0.13) = \frac{1}{2}(0.01 - 0.13) = -0.06.$$

这条等式对这条三点离散路径**精确成立**。但这里的 0.13 还不能替换成 $T = 1$, 因为只有两个有限长度的时间段。随着网格细化, 平方增量和才逐渐趋向 1。

17.8 Itô 引理与普通 Taylor 展开只有一步不同

对一个足够光滑的函数 $f(t, x)$, 二阶 Taylor 展开为

$$\Delta f \approx f_t \Delta t + f_x \Delta x + \frac{1}{2} f_{xx} (\Delta x)^2,$$

这里忽略混合项与更高阶项需要以随机增量的数量级为依据。若

$$\Delta X \approx a \Delta t + b \Delta W,$$

那么

$$(\Delta X)^2 \approx b^2 (\Delta W)^2 \approx b^2 \Delta t.$$

原因是 $(\Delta t)^2$ 比 Δt 小得快, $\Delta t \Delta W$ 的典型量级是 $(\Delta t)^{3/2}$, 而 $(\Delta W)^2$ 是 Δt 量级, 不能扔掉。因而得

$$df(t, X_t) = \left(f_t + a f_x + \frac{1}{2} b^2 f_{xx} \right) dt + b f_x dW_t.$$

17.9 GBM 的对数变换究竟做了什么

在几何布朗运动模型 $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$ 中，令 $f(S) = \ln S$ 。则

$$f'(S) = \frac{1}{S}, \quad f''(S) = -\frac{1}{S^2}.$$

代入 Itô 引理：

$$\begin{aligned} d \ln S_t &= \frac{1}{S_t} dS_t + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{S_t^2} \right) (\sigma^2 S_t^2) dt \\ &= \mu dt + \sigma dW_t - \frac{1}{2} \sigma^2 dt \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t. \end{aligned}$$

从 0 积分至 T ：

$$\ln \frac{S_T}{S_0} = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma W_T.$$

指数化才得到 S_T 的显式解。这里的 $-\sigma^2/2$ 不是“市场实际收益率少赚了一截”，而是对数变换的曲率引入的 Itô 修正。

均值和中位数为什么不同

设 $S_0 = 100, \mu = 8\%, \sigma = 20\%, T = 1$ 。因为 $W_T \sim N(0, 1)$ ，上式中的随机指数有均值参数 $0.08 - 0.02 = 0.06$ 、方差 0.04 。对数收益率的中位数为 0.06 ，因此价格中位数是

$$\text{Med}(S_1) = 100e^{0.06} \approx 106.18.$$

而 $E[e^{\sigma W_1}] = e^{\sigma^2/2}$ ，所以价格均值为

$$E[S_1] = 100e^{0.06}e^{0.02} = 100e^{0.08} \approx 108.33.$$

均值高于中位数，来自价格分布右尾较长，不能把一条“典型路径”的末值当成所有路径的平均值。

17.10 离散恒等式先告诉我们：左端点积分为何多出修正项

在真正写 $\int W_t dW_t$ 之前，先看小学代数中一个没有任何概率含义的恒等式：

$$b^2 - a^2 = 2a(b - a) + (b - a)^2.$$

把 a 看作这一时刻的路径值 W_i ， b 看作下一时刻的 W_{i+1} ，那么

$$W_{i+1}^2 - W_i^2 = 2W_i \Delta W_i + (\Delta W_i)^2.$$

从第一个时间步加到最后一步，中间平方差全部抵消：

$$W_n^2 - W_0^2 = 2 \sum_{i=0}^{n-1} W_i \Delta W_i + \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta W_i)^2.$$

现在只取三个步骤，设路径依次是 $0, 0.2, -0.1, 0.4$ ，那么三个增量分别是 $0.2, -0.3, 0.5$ 。

区间	左端值 W_i	增量 ΔW_i	左端积 $W_i \Delta W_i$	$(\Delta W_i)^2$
1	0	0.2	0	0.04
2	0.2	-0.3	-0.06	0.09
3	-0.1	0.5	-0.05	0.25
合计			-0.11	0.38

将求和恒等式移项：

$$\sum_i W_i \Delta W_i = \frac{1}{2} \left[W_n^2 - W_0^2 - \sum_i (\Delta W_i)^2 \right] = \frac{1}{2} (0.16 - 0.38) = -0.11.$$

如果右端点取值，则求和成为

$$0.2 \times 0.2 + (-0.1) \times (-0.3) + 0.4 \times 0.5 = 0.27.$$

两种求和竟相差 0.38，正好等于所有增量平方之和。这解释了为什么随机积分必须先说清楚取值约定。在 Itô 积分里，采用左端点信息有交易上的意义：交易仓位在下一个价格变动发生之前已经决定，不能预知下一步结果。

布朗运动的关键性质是当时间划分越来越细时，平方增量之和趋向于 T ，而不是趋向于 0（概率意义下收敛）。因此形式上得到

$$\int_0^T W_t dW_t = \frac{1}{2} (W_T^2 - T).$$

但要留意：三步路径中的平方和 0.38 并不等于我们可以任意假定的期限 T 。只有细分极限才给出二次变差 $[W]_T = T$ 。这正是 Itô 公式与普通微积分链式法则的区别。

17.11 对数收益中的波动率修正项

对几何布朗运动

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

取 $f(S) = \ln S$ 。它的一阶、二阶导数分别是 $f'(S) = 1/S$ 与 $f''(S) = -1/S^2$ 。套用 Itô 公式：

$$\begin{aligned} d \ln S_t &= f'(S_t) dS_t + \frac{1}{2} f''(S_t) (dS_t)^2 \\ &= \frac{1}{S_t} (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) - \frac{1}{2 S_t^2} \sigma^2 S_t^2 dt \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t. \end{aligned}$$

这里 $(dS_t)^2$ 中保留下来的项只有 $\sigma^2 S_t^2 (dW_t)^2 = \sigma^2 S_t^2 dt$ 。负号来自 $\ln S$ 的二阶导数是负数，并非人为加上一项“波动率惩罚”。

若 $\mu = 8\%$, $\sigma = 20\%$ ，对数价格的漂移是 $8\% - \frac{1}{2}(20\%)^2 = 6\%$ 。与此同时， $E[S_T] = S_0 e^{\mu T}$ 仍成立；这两句话并不矛盾，因为对数的期望一般不等于期望的对数（Jensen 不等式）。

第 18 章

Girsanov：为什么漂移 μ 可以换成 r

风险中性测度与定价权重

测度变换的定价条件

设股票在真实测度下具有漂移 μ 。通过适当的概率测度变换，可以在定价测度中得到与无风险收益率相联系的漂移。该处理依赖模型的无套利条件，并不改变已经观察到的历史数据。

市场价格风险的数值直觉

若 $\mu = 10\%$, $r = 4\%$, $\sigma = 20\%$ ，则市场价格风险

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma} = \frac{0.10 - 0.04}{0.20} = 0.30.$$

风险中性布朗运动可以写成 $dW^Q = dW^P + \lambda dt$ 。代回股票 SDE 后，漂移恰好从 μ 变成 r 。

测度变换的定价条件

风险中性世界不是“真实世界”。定价时之所以可以把漂移从 μ 换成 r ，本质上是通过改变概率测度，让贴现价格成为鞅。

18.1 用数字看漂移是怎么被换掉的

例题

真实世界里假设

$$\frac{dS}{S} = 0.10dt + 0.20dW^{\mathbb{P}}.$$

无风险利率 $r = 4\%$ 。市场价格风险

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma} = \frac{0.10 - 0.04}{0.20} = 0.30.$$

定义新的布朗运动

$$dW^{\mathbb{Q}} = dW^{\mathbb{P}} + 0.30dt.$$

所以

$$dW^{\mathbb{P}} = dW^{\mathbb{Q}} - 0.30dt.$$

代回：

$$\frac{dS}{S} = 0.10dt + 0.20(dW^{\mathbb{Q}} - 0.30dt) = (0.10 - 0.06)dt + 0.20dW^{\mathbb{Q}} = 0.04dt + 0.20dW^{\mathbb{Q}}.$$

于是漂移正好变成 $r = 4\%$ 。

18.2 测度变换与资产价格路径

考虑同一只股票，在历史统计意义下，它的收益率可以写作

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t^{\mathbb{P}}.$$

这里 $\mathbb{P}$ 代表用于描述实际统计规律的概率测度， μ 是这一测度下的漂移。定价时我们希望贴现后的可交易资产是鞅，于是需要换一个概率测度 $\mathbb{Q}$ 。在常数系数、满足适当技术条件的模型里，设

$$\theta = \frac{\mu - r}{\sigma}, \quad W_t^{\mathbb{Q}} = W_t^{\mathbb{P}} + \theta t.$$

由 $dW_t^{\mathbb{P}} = dW_t^{\mathbb{Q}} - \theta dt$ ，原股票方程变为

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= \mu dt + \sigma(dW_t^{\mathbb{Q}} - \theta dt) \\ &= (\mu - \sigma\theta)dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}} \\ &= r dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}. \end{aligned}$$

漂移替换逐项代数

若 $\mu = 10\%$, $r = 4\%$, $\sigma = 20\%$, 则

$$\theta = \frac{0.10 - 0.04}{0.20} = 0.30.$$

因此

$$\begin{aligned} 0.10 dt + 0.20 dW^{\mathbb{P}} &= 0.10 dt + 0.20(dW^{\mathbb{Q}} - 0.30 dt) \\ &= (0.10 - 0.06)dt + 0.20 dW^{\mathbb{Q}} \\ &= 0.04 dt + 0.20 dW^{\mathbb{Q}}. \end{aligned}$$

这段代数展示的是同一随机过程在另一测度下的表示。真正的 Girsanov 定理还需要证明新定义的 $W^{\mathbb{Q}}$ 在新测度下确实是布朗运动；一般不能只凭一行代数就宣布它成立。常见的充分条件可由指数鞅和 Novikov 条件给出。

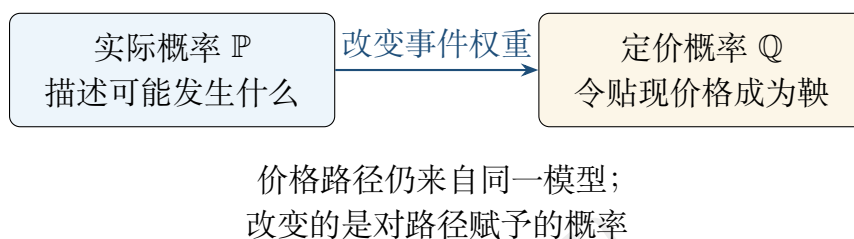


图18.1 真实测度与定价测度的不同用途。

如果模型中股票以连续股息率 q 支付股息，则在风险中性测度下，除息股票价格的漂移应是 $r - q$ ，而不是 r 。之所以要区分，是因为投资者实际持有股票的总收益包括价格变动与股息流入，风险中性化针对的是**贴现后的总收益过程**。

18.3 测度变换的指数权重从哪里来

在风险中性定价里，我们并没有改变某一天实际上发生过的股价，只是换了一种给未来路径赋予概率权重的方法。这一点可以从最熟悉的正态密度开始看。

设 Z 在真实测度 $\mathbb{P}$ 下是标准正态变量，其密度为

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}.$$

如果我们希望引入一个权重，让加权后的变量均值整体向左平移 $\lambda\sqrt{T}$ ，对应的密度比是

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(z + \lambda\sqrt{T})}{\varphi(z)} &= \exp \left[-\frac{(z + \lambda\sqrt{T})^2 - z^2}{2} \right] \\ &= \exp \left(-\lambda\sqrt{T}z - \frac{1}{2}\lambda^2 T \right). \end{aligned}$$

由于布朗运动在期限 T 的增量可写成 $W_T = \sqrt{T}Z$ ，上式恰好成为

$$L_T = \exp \left(-\lambda W_T^{\mathbb{P}} - \frac{1}{2}\lambda^2 T \right).$$

L_T 的期望是 1:

$$E^{\mathbb{P}}[L_T] = e^{-\lambda^2 T/2} E[e^{-\lambda W_T}] = e^{-\lambda^2 T/2} e^{\lambda^2 T/2} = 1.$$

因此可用它定义新测度 $d\mathbb{Q} = L_T d\mathbb{P}$, 其概率权重总和依旧为 1。在常数 λ 和标准布朗运动的这组假设下, Girsanov 定理告诉我们

$$W_t^{\mathbb{Q}} = W_t^{\mathbb{P}} + \lambda t$$

在 $\mathbb{Q}$ 下成为标准布朗运动。对于股价模型 $dS_t/S_t = \mu dt + \sigma dW_t^{\mathbb{P}}$, 选择 $\lambda = (\mu - r)/\sigma$, 代入后漂移变为 r 。

如果 $\mu = 10\%$, $r = 4\%$, $\sigma = 20\%$, 则 $\lambda = 0.30$ 。假设 $T = 1$, 某条路径上 $W_1^{\mathbb{P}} = 1$, 它得到的密度权重为

$$L_1 = e^{-0.30 - 0.30^2/2} = e^{-0.345} \approx 0.7082.$$

这个权重不是“这条路径有 70.82% 的概率”, 而是相对于原来的概率测度, 这类路径在新的加权规则下被赋予了不同的相对权重。连续时间的 Girsanov 并不是任意模型都能照搬: 在变动的市场价格风险、跳跃过程等更复杂情况下, 还需要检验相应的可积性和模型条件。

Zoey Lin

专题 F

随机微积分：从有限和到 Itô 修正

随机过程的数学写法容易显得陌生，但最重要的变化其实只有一处：对布朗运动而言，平方的增量在总和里不会消失。

F.1 从离散恒等式开始

对于任意数列 $w_0, w_1, \dots, w_n$ ，记 $\Delta w_i = w_{i+1} - w_i$ 。由普通代数恒等式

$$w_{i+1}^2 - w_i^2 = 2w_i \Delta w_i + (\Delta w_i)^2.$$

逐项求和时左侧望远镜式抵消：

$$w_n^2 - w_0^2 = 2 \sum_{i=0}^{n-1} w_i \Delta w_i + \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta w_i)^2.$$

如果 w_i 是足够平滑函数的取值，那么 $\sum (\Delta w_i)^2 \rightarrow 0$ ；如果它来自布朗运动，最后一项在概率意义下趋于总时间 T 。因此

$$\int_0^T W_t dW_t = \frac{1}{2}(W_T^2 - T)$$

是普通有限和在布朗运动极限下得到的结论，而非代数上的神秘规则。

F.2 用有限路径看左端点与右端点

取路径 $w_0 = 0, w_1 = 0.2, w_2 = -0.1, w_3 = 0.4$ ，增量是 $0.2, -0.3, 0.5$ 。左端点和为

$$0 \times 0.2 + 0.2(-0.3) + (-0.1)(0.5) = 0 - 0.06 - 0.05 = -0.11.$$

右端点和则是

$$0.2(0.2) + (-0.1)(-0.3) + 0.4(0.5) = 0.04 + 0.03 + 0.20 = 0.27.$$

差值 0.38，恰好是三个增量平方和 $0.04 + 0.09 + 0.25$ 。这组有限路径不是布朗运动的随机抽样证明，但它能准确说明两种求和规则为什么不同。

F.3 Itô 引理为何会留下二阶导数

设 $dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dW_t$ 。对光滑 $f(x, t)$ 作二阶 Taylor 展开：

$$df \approx f_t dt + f_x dX + \frac{1}{2} f_{xx} (dX)^2.$$

将 dX 代入并保留到 dt 的阶：

$$(dX)^2 = (a dt + b dW)^2 = b^2 (dW)^2 + 2ab dt dW + a^2 (dt)^2.$$

其中 $(dW)^2$ 在 Itô 演算下对应 dt ，后两项在极限里可以忽略。于是

$$df = (f_t + a f_x + \frac{1}{2} b^2 f_{xx}) dt + b f_x dW.$$

F.4 GBM 的负号从哪里来

设 $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$, 取 $f(S) = \ln S$ 。一阶导数 $f' = 1/S$, 二阶导数 $f'' = -1/S^2$ 。所以

$$\begin{aligned} d \ln S_t &= \frac{1}{S} (\mu S dt + \sigma S dW) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{S^2} \right) (\sigma^2 S^2 dt) \\ &= (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_t. \end{aligned}$$

因此

$$S_T = S_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T + \sigma W_T \right].$$

公式里的 $-\sigma^2/2$ 不是经验修正, 而是 $\ln S$ 的二阶导数为负而直接产生的。

F.5 Girsanov 变换只改定价时的概率权重

在真实测度 $\mathbb{P}$ 下, 假设

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t^{\mathbb{P}}.$$

若 $\mu = 10\%, r = 4\%, \sigma = 20\%$, 市场风险价格 $\theta = (\mu - r)/\sigma = 0.3$ 。在满足适当可积条件时, 定义风险中性布朗运动

$$W_t^{\mathbb{Q}} = W_t^{\mathbb{P}} + \theta t, \quad dW_t^{\mathbb{P}} = dW_t^{\mathbb{Q}} - 0.3dt.$$

代入股价动态:

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= 0.10dt + 0.20(dW_t^{\mathbb{Q}} - 0.30dt) \\ &= (0.10 - 0.06)dt + 0.20dW_t^{\mathbb{Q}} \\ &= 0.04dt + 0.20dW_t^{\mathbb{Q}}. \end{aligned}$$

股价的现实统计分布并没有因为我们换了定价测度而改变; 改变的是我们计算无套利价格时给未来路径赋予的权重。

6 从有限和看到 Itô 修正

6.1 先计算一条具体的离散路径

考虑某条布朗运动离散观察路径,四个时刻的取值依次为 0, 0.3, 0.1, 0.6。三个增量是 0.3, -0.2, 0.5。若用每段区间左端点的 W 值近似积分, 得到

$$I_L = 0(0.3) + 0.3(-0.2) + 0.1(0.5) = -0.01.$$

改用每段右端点的 W 值, 则

$$I_R = 0.3(0.3) + 0.1(-0.2) + 0.6(0.5) = 0.37.$$

两者相差 0.38, 恰好等于三个增量的平方和,

$$(0.3)^2 + (-0.2)^2 + (0.5)^2 = 0.09 + 0.04 + 0.25 = 0.38.$$

对于普通光滑曲线, 细分区间后左、右端点和会趋于同一个 Riemann 积分; 布朗运动的情况有所不同。因为平方增量总和随分割加密趋于区间长度 T , 左端点规则与右端点规则会留下有限差异。

6.2 离散平方恒等式给出连续积分的答案

对任意数列都有

$$W_{i+1}^2 - W_i^2 = 2W_i(W_{i+1} - W_i) + (W_{i+1} - W_i)^2.$$

把所有区间相加, 中间的平方项逐个相消, 得到

$$W_T^2 - W_0^2 = 2 \sum_i W_i \Delta W_i + \sum_i (\Delta W_i)^2.$$

当分割逐渐加密, 左端点和趋于 Itô 积分, 布朗运动的二次变差趋于 T 。取 $W_0 = 0$,

$$\boxed{\int_0^T W_t dW_t = \frac{1}{2}(W_T^2 - T).}$$

对上面的离散例子, 右边的有限和版本等于 $(0.6^2 - 0.38)/2 = -0.01$, 和左端点直接计算一致。这里 0.38 只是这条粗网格路径的平方增量和; 它在有限分割上不必等于完整区间长度。

6.3 一般函数的 Itô 引理

设 $dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dW_t$, 考虑足够光滑的函数 $f(x, t)$ 。二元 Taylor 展开中保留到二阶,

$$df \approx f_t dt + f_x dX + \frac{1}{2} f_{xx} (dX)^2.$$

把 $dX = a dt + b dW$ 代入平方项,

$$(dX)^2 = a^2 dt^2 + 2ab dt dW + b^2 (dW)^2.$$

按 Itô 演算的阶数规则, dt^2 与 $dt dW$ 在极限中消失, $(dW)^2$ 留下 dt , 从而

$$df = \left(f_t + af_x + \frac{1}{2}b^2 f_{xx}\right)dt + bf_x dW_t.$$

这个公式里的 $\frac{1}{2}b^2 f_{xx}$ 由随机增量的二次变差产生。它和常规 Taylor 展开具有直接的代数联系。

6.4 用对数函数求出 GBM 的精确解

设 $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$ 。取 $f(S) = \ln S$, 则 $f'(S) = 1/S$ 、 $f''(S) = -1/S^2$ 。代入 Itô 引理,

$$d \ln S_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW_t.$$

从 0 积分到 T ,

$$\ln \frac{S_T}{S_0} = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T + \sigma W_T,$$

即

$$S_T = S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T + \sigma W_T\right].$$

例如 $S_0 = 100$ 、 $\mu = 0.08$ 、 $\sigma = 0.2$ 、 $T = 1$, 若实现的布朗增量为 $W_T = 0.3$,

$$S_T = 100e^{(0.08-0.02)+0.2(0.3)} = 100e^{0.12} \approx 112.7497.$$

参数 μ 是价格过程的算术漂移, $\mu - \sigma^2/2$ 是对数价格的漂移。两者不同源于对数函数的曲率。

从平方增量到随机积分

对任何一条离散路径 $W_0, W_1, \dots, W_n$ ，普通代数都给出

$$W_{i+1}^2 - W_i^2 = 2W_i(W_{i+1} - W_i) + (W_{i+1} - W_i)^2.$$

把两端求和，得到

$$\sum_{i=0}^{n-1} W_i \Delta W_i = \frac{1}{2} \left(W_n^2 - W_0^2 - \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta W_i)^2 \right).$$

这在任何有限分割上都是精确恒等式，不需要借助随机微积分定理。

一个完全可核算的离散路径

设某条离散路径经过 $0, 0.3, 0.1, 0.6$ ，增量为 $0.3, -0.2, 0.5$ 。左端点随机和为

$$I_L = 0(0.3) + 0.3(-0.2) + 0.1(0.5) = -0.01.$$

平方增量和为 $Q = 0.3^2 + (-0.2)^2 + 0.5^2 = 0.38$ 。利用上面的恒等式，

$$\frac{1}{2}(W_3^2 - W_0^2 - Q) = \frac{1}{2}(0.36 - 0.38) = -0.01.$$

两个计算一致。若改用右端点随机和，结果是 $I_R = 0.3(0.3) + 0.1(-0.2) + 0.6(0.5) = 0.37$ 。二者相差 0.38 ，恰为该离散路径的平方增量和。

布朗运动的极限性质

标准布朗运动在不重叠时间段上的增量独立，并满足 $\Delta W_i \sim N(0, \Delta t_i)$ 。由正态变量的矩可算出

$$E[(\Delta W_i)^2] = \Delta t_i, \quad \text{Var}((\Delta W_i)^2) = 2(\Delta t_i)^2.$$

因此 $Q_n = \sum_i (\Delta W_i)^2$ 的均值为 T ，方差为 $2 \sum_i (\Delta t_i)^2$ 。若最大网格宽度趋于零，方差也趋于零，于是 Q_n 依概率收敛到 T 。以左端点和定义随机积分，便得到

$$\int_0^T W_t dW_t = \frac{1}{2}(W_T^2 - T).$$

这里的 T 是随机路径二次变差留下的项。记号 $(dW_t)^2 = dt$ 应按这个极限性质理解。

带相关性的两个随机冲击

若 dW^1 、 dW^2 的瞬时相关系数是 ρ ，则二者的交叉二次变差满足 $dW^1 dW^2 = \rho dt$ 。对二元函数 $f(x, y)$ 使用 Itô 引理时，除了 f_{xx} 和 f_{yy} 项，还需要

$$\rho f_{xy} \sigma_x \sigma_y dt.$$

这个项正好对应普通二元 Taylor 展开中的交叉二阶项，只是布朗增量的交叉乘积在极限中不能忽略。

从有限平方和到 Itô 积分

设 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$, 记 $\Delta W_i = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ 。任意两个实数都满足

$$W_{t_{i+1}}^2 - W_{t_i}^2 = 2W_{t_i}\Delta W_i + (\Delta W_i)^2.$$

将各项相加, 左端望远镜式抵消, 得到完全精确的离散恒等式

$$2 \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i} \Delta W_i = W_T^2 - W_0^2 - \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta W_i)^2.$$

对于标准布朗运动, 随着分割加细, 平方增量和按概率收敛到 T ; 左端使用左端点的随机和收敛到 Itô 积分。因此在 $W_0 = 0$ 时,

$$\int_0^T W_t dW_t = \frac{1}{2}(W_T^2 - T).$$

若 $T = 1$ 、样本路径终值 $W_1 = 0.8$, 积分的数值为 $\frac{1}{2}(0.64 - 1) = -0.18$ 。普通微积分若直接写作 $W_1^2/2 = 0.32$, 会漏掉二次变差所留下的 -0.5 修正。

二次变差与概率收敛

单一的 ΔW 有正有负; 其平方期望为 Δt , 于是 $\sum (\Delta W_i)^2$ 的期望为 T 。更严格地说, 在均匀剖分下, 该平方和的方差会随着网格变细而趋于零。因此写 $dW_t^2 = dt$ 时, 需要理解为随机微积分里的二次变差规则, 不是每一个有限随机增量的平方都恰好等于时间步长。

GBM 对数修正的计算

给定 $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$, 对 $f(S) = \ln S$ 使用 Itô 引理, 其中 $f'(S) = 1/S$, $f''(S) = -1/S^2$, 于是

$$d \ln S_t = \frac{dS_t}{S_t} - \frac{(dS_t)^2}{2S_t^2} = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_t.$$

第二项中的 $\sigma^2/2$ 正是 f'' 与二次变差共同产生的修正。积分后得到对数正态模型的精确终值表达式。

第七部分

Black–Scholes 与波动率

Zoey Lin

第 19 章

Black–Scholes PDE：复制组合怎样把随机项消掉

从 Delta 对冲推导定价方程

Delta 对冲

在 Black – Scholes 模型中，股票和期权价格受到同一个布朗运动驱动。选择适当的股票头寸，可消除组合的瞬时随机项。对冲组合的局部收益由无套利条件约束，从而得到定价偏微分方程。

为什么 Delta 要取期权对股价的一阶导数

期权随机项是 $\sigma S V_S dW$ ；一股股票随机项是 $\sigma S dW$ 。若组合为 $V - \Delta S$ ，随机部分就是

$$\sigma S (V_S - \Delta) dW.$$

为了让它等于 0，只需要令

$$\Delta = V_S.$$

这就是 Delta 对冲最底层的来源。

例题

设期权价格为 $V(S, t)$ 。用 Itô 引理：

$$dV = \left(V_t + \mu SV_S + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} \right) dt + \sigma SV_S dW.$$

构造组合 $\Pi = V - \Delta S$ ，取 $\Delta = V_S$ ，则随机项抵消，

$$d\Pi = \left(V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} \right) dt.$$

无套利要求它赚无风险利率：

$$d\Pi = r(V - SV_S)dt.$$

因此得到 PDE：

$$V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0.$$

19.1 为什么 PDE 里没有 μ

说明

这是 Black-Scholes 最值得记住的“惊喜”：真实股票漂移 μ 在对冲以后消失了。原因不是我们“假设 $\mu = r$ ”，而是 Delta 对冲把含有 μ 的股票随机暴露一起消掉了。剩下的是一个瞬时无风险组合，无套利迫使它只能赚 r 。

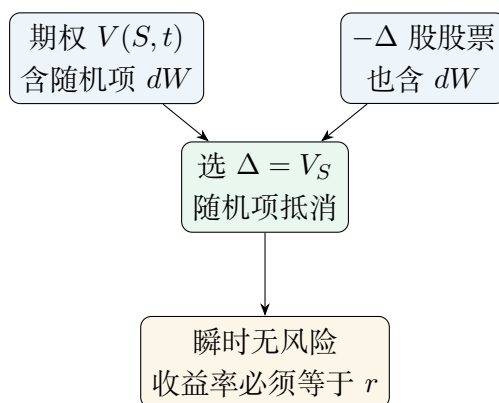


图19.1 Delta 对冲消除随机项并导出定价方程。

19.2 Black – Scholes 的分步计算

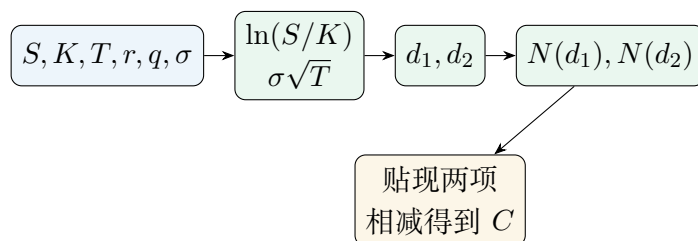


图19.2 Black – Scholes 数值计算的中间量次序。

原数值例题的高精度校订

输入 $S = 100, K = 105, T = 0.5, r = 0.04, q = 0.01, \sigma = 0.25$ 。

$$d_1 = \frac{\ln(100/105) + (0.04 - 0.01 + 0.25^2/2) \times 0.5}{0.25\sqrt{0.5}} \approx -0.102758,$$

$$d_2 = d_1 - 0.25\sqrt{0.5} \approx -0.279534.$$

用标准正态分布函数的较高精度取值：

$$N(d_1) \approx 0.459078, \quad N(d_2) \approx 0.389917.$$

分别计算：

$$100e^{-0.005}N(d_1) \approx 45.6788,$$

$$105e^{-0.02}N(d_2) \approx 40.1306.$$

所以

$$C \approx 5.5482 \quad (\text{精算取 } 5.55).$$

本书把 5.5482 最终取为 5.55，其中中间项曾在较早版本中出现不一致的四舍五入；这版建议中间量保留至少 6 位小数，最后一步才四舍五入。

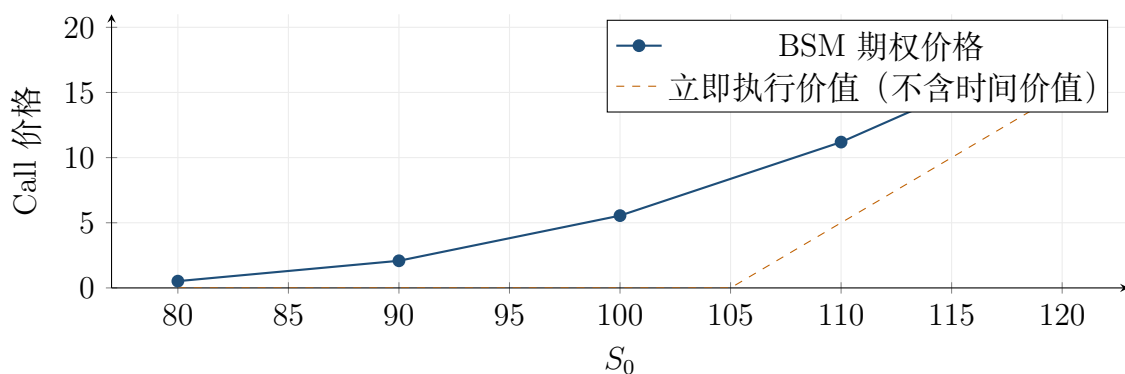


图 19.3: 到期前看涨期权价格通常高于立即执行价值：多出来的是时间价值。

19.3 Feynman–Kac 如何把微分方程变回期望

Black–Scholes 方程看起来是一道关于时间、股价的偏微分方程，期权价格却又可以写成未来支付的贴现期望。这两个结论并不是两种无关的方法。只要模型满足相应的光滑性、增长性和可积性条件，Feynman–Kac 定理就把它们连接起来。

先从在风险中性测度下的 GBM 写起，暂且取股息收益率 $q = 0$ ：

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}}.$$

设一个光滑的函数 $V(t, S)$ 满足

$$V_t + rSV_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} - rV = 0, \quad V(T, S) = g(S),$$

其中 g 可以是欧式看涨期权到期支付 $\max(S - K, 0)$ 。现在沿股票路径观察 $V(t, S_t)$ ；通过 Itô 公式，

$$dV(t, S_t) = (V_t + rS_t V_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 V_{SS}) dt + \sigma S_t V_S dW_t^{\mathbb{Q}}.$$

因为 V 满足上面的 PDE，括号里的漂移恰好等于 rV ，于是

$$dV(t, S_t) = rV(t, S_t)dt + \sigma S_t V_S dW_t^{\mathbb{Q}}.$$

将它乘上贴现因子 e^{-rt} 。用乘积法则（注意 e^{-rt} 是确定性的可微函数，没有额外的二次变差项）：

$$\begin{aligned} d(e^{-rt}V) &= e^{-rt}dV - re^{-rt}Vdt \\ &= e^{-rt}\sigma S_t V_S dW_t^{\mathbb{Q}}. \end{aligned}$$

贴现后的 V 没有漂移项了。在相关随机积分是真鞅的条件下，取条件期望便得到

$$e^{-rt}V(t, S_t) = E^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}V(T, S_T) \mid \mathcal{F}_t].$$

用终端条件 $V(T, S_T) = g(S_T)$ ，并将 e^{-rt} 移到另一侧：

$$\boxed{V(t, S_t) = E^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}g(S_T) \mid \mathcal{F}_t].}$$

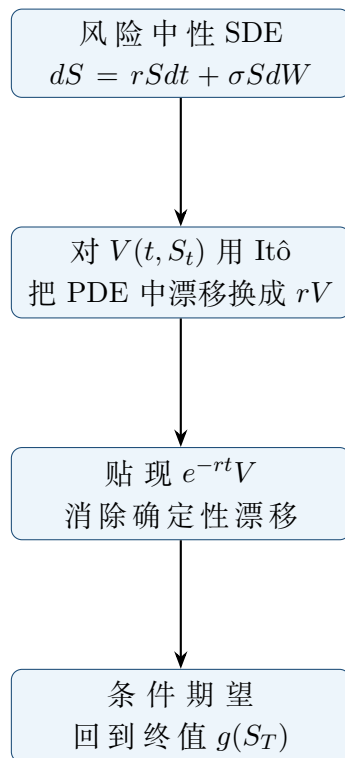


图19.4 贴现价格过程的 Itô 展开与 Feynman - Kac 联系。

这个过程还提示了一个重要区别：风险中性定价依赖的是能找到合适的定价测度与可交易资产条件；并不是任何写出的 SDE 都自动满足该套无套利假设。模型参数、交易约束、市场不完备程度不同，测度的选取也可能不唯一。

第 20 章

Black–Scholes 闭式解的逐项计算

不要一次性把整个公式塞进计算器

定价输入与单位

Black–Scholes 最容易出错的地方，不是理论，而是把 $\ln(S/K)$ 、 $\sqrt{T}$ 、贴现因子、 d_1 、 d_2 一次性输入。最稳的做法就是固定八块中间量，每块都能单独检查。

d_1 与 d_2 的直觉

d_2 更接近“在风险中性世界里到期实值的标准化距离”； $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T}$ ，比 d_2 多一个波动调整。初学时不必强行背概率解释，先保证八盒法算得稳定。

常见误算

若 T 用年，而你把 6 个月写成 6 而不是 0.5，整个答案会彻底错误。期权计算里“时间单位”是第一优先级检查项。

20.1 完整数值演算

例题

设 $S_0 = 100, K = 105, T = 0.5, r = 4\%, q = 1\%, \sigma = 25\%$ 。

1. $\sqrt{T} = \sqrt{0.5} = 0.7071$;
2. $\sigma\sqrt{T} = 0.25 \times 0.7071 = 0.1768$;
3. $\ln(S_0/K) = \ln(100/105) = \ln(0.95238) = -0.04879$;
4. $(r - q + \sigma^2/2)T = (0.04 - 0.01 + 0.03125) \times 0.5 = 0.030625$;
5. 分子 $= -0.04879 + 0.030625 = -0.018165$;
6. $d_1 = -0.018165/0.1768 = -0.1028$;
7. $d_2 = d_1 - 0.1768 = -0.2796$;
8. 查表 $N(d_1) \approx 0.4591, N(d_2) \approx 0.3899$ 。

于是

$$C = S_0 e^{-qT} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2).$$

逐项：

$$S_0 e^{-qT} N(d_1) = 100 e^{-0.005} \times 0.4591 \approx 45.68,$$

$$K e^{-rT} N(d_2) = 105 e^{-0.02} \times 0.3899 \approx 40.13.$$

所以

$$C \approx 5.55.$$

20.2 $N(d_1)$ 和 $N(d_2)$ 不要死记

说明

对无股息股票， $N(d_2)$ 可以粗略理解成风险中性世界下“到期实值”的概率，而 $N(d_1)$ 与 Delta 更接近。它们只差一个 $\sigma\sqrt{T}$ ：

$$d_1 - d_2 = \sigma\sqrt{T}.$$

所以波动率越大、期限越长，这两个数的间距越大。

变式

如果 $d_2 = -0.28$ ，那么 $N(d_2) \approx 0.39$ ，说明在风险中性定价权重下，到期落在执行价上方的概率大约 39%。这不等于真实世界预测概率。

结果核对

三重复核：

1. 看涨期权价格必须在 $[0, S_0 e^{-qT}]$ 内；
2. 因为是虚值 call，所以价格不应太大；
3. 可用 Put-Call Parity 反查 put 价格。

20.3 把 Delta 对冲记成一本真正的现金账

说明

Delta 不是让风险“消失”，而是在当前价格附近把组合的一阶股价敏感度抵掉。股票再走远一点，Gamma 又会让 Delta 改变，所以需要调整仓位。

空 10 份 Call，怎么用股票做局部一阶对冲

上一章每份 Call 的 Delta 约 0.456788。第 1 步：空 10 份 Call 的总 Delta 是

$$-10 \times 0.456788 = -4.56788.$$

第 2 步：为把 Delta 调回 0，需要买入 4.56788 股股票（假设每份合约单位为 1 股）。

第 3 步：如果现价 $S = 100$ ，买股需 456.788 元。若用融资完成，对冲后并非“白赚期权金”；资金成本要计入现金账户。第 4 步：当股价变动 $\Delta S = 2$ ，Gamma 约 0.022337 时，单份 Call 的 Delta 近似变化

$$\Delta\Delta \approx \Gamma\Delta S = 0.022337 \times 2 = 0.044674.$$

新的 Delta 约 0.501462。为保持 Delta 中性，空 10 份 Call 需持有约 5.01462 股，再买入

$$5.01462 - 4.56788 = 0.44674 \text{ 股}.$$

结果核对

看涨期权空头的 Delta 是负的，所以用正股票对冲。如果题目改变了合约乘数，例如“每份代表 100 股”，则所有股票头寸与现金流都要乘 100。

20.4 牛顿法反推 IV：误差大，先别乱调初值

将 5.80 元市场价反解为波动率

市场 Call 价格是 5.80；当 $\sigma_0 = 0.25$ 时，模型价 5.5482， $\text{Vega} \approx 27.9210$ （每 1.00 波动率单位）。

$$\begin{aligned}\text{价格误差} &= 5.5482 - 5.80 = -0.2518, \\ \text{波动率修正} &= \frac{-0.2518}{27.9210} \approx -0.00902, \\ \sigma_1 &= 0.25 - (-0.00902) \approx 0.25902.\end{aligned}$$

因此下一次尝试约为 25.90%；然后再用 σ_1 重新定价、重新算 Vega、继续迭代。

常见误算

这里 Vega 约 27.92 是“波动率变化 1.00”的价格导数，不是“每 1 个波动率百分点”。波动率升 1 个百分点 = 0.01，价格一阶只约升 $27.92 \times 0.01 = 0.2792$ 元。

20.5 两个正态分布函数到底从哪里来：把积分逐行做完

Black-Scholes 看涨期权公式中的 $N(d_1)$ 和 $N(d_2)$ 并不是经验拟合出来的。我们从风险中性期望开始。假设股票支付连续股息率 q ，到期股价在风险中性测度下满足

$$S_T = S_0 \exp \left[\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \sqrt{T} Z \right], \quad Z \sim N(0, 1).$$

看涨期权支付 $(S_T - K)^+$ ，因此其价格是

$$C_0 = e^{-rT} E^Q[(S_T - K)^+].$$

先确定哪些 Z 会使期权在到期时有价值。 $S_T > K$ 等价于

$$\begin{aligned}\ln S_0 + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \sqrt{T} Z &> \ln K, \\ Z &> \frac{\ln(K/S_0) - (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}}.\end{aligned}$$

把右边记作 a 。因此原始期望就可以写成只在 $Z > a$ 区间上积分：

$$C_0 = e^{-rT} \int_a^\infty (S_T - K) \phi(z) dz.$$

展开括号后出现两项，分别处理。第二项最简单：

$$-K e^{-rT} \int_a^\infty \phi(z) dz = -K e^{-rT} N(-a).$$

定义

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

可以看出 $-a = d_2$ ，所以第二项就是 $-Ke^{-rT}N(d_2)$ 。

第一项包含 S_T ，看上去更麻烦。把 S_T 的指数表达式代进去，并将 $e^{-rT}S_0e^{(r-q)T}$ 先整理为 S_0e^{-qT} ：

$$S_0e^{-qT} \int_a^\infty \exp\left(\sigma\sqrt{T}z - \frac{\sigma^2T}{2}\right) \phi(z) dz.$$

正态密度 $\phi(z) = (2\pi)^{-1/2}e^{-z^2/2}$ ，所以积分中的指数合起来是

$$\begin{aligned} -\frac{z^2}{2} + \sigma\sqrt{T}z - \frac{\sigma^2T}{2} &= -\frac{1}{2}[z^2 - 2\sigma\sqrt{T}z + \sigma^2T] \\ &= -\frac{1}{2}(z - \sigma\sqrt{T})^2. \end{aligned}$$

这一步称为配方。它说明

$$\exp\left(\sigma\sqrt{T}z - \frac{\sigma^2T}{2}\right) \phi(z) = \phi(z - \sigma\sqrt{T}).$$

现在令 $u = z - \sigma\sqrt{T}$ ，积分下限变成 $a - \sigma\sqrt{T}$ ，于是

$$\int_a^\infty \phi(z - \sigma\sqrt{T}) dz = \int_{a-\sigma\sqrt{T}}^\infty \phi(u) du = N(-a + \sigma\sqrt{T}).$$

由于 $-a = d_2$ ，定义 $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T}$ ，第一项就是 $S_0e^{-qT}N(d_1)$ 。两项合并：

$$C_0 = S_0e^{-qT}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2).$$

到这里， $N(d_1)$ 与 $N(d_2)$ 的来历完全清楚了：两个积分的积分下限不同，原因是第一项多乘了一份指数形式的股票价格，而指数与正态密度相乘后使正态密度发生了平移。

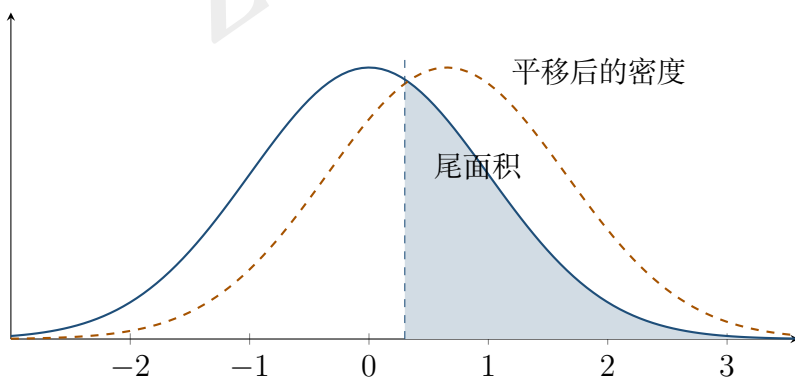


图 20.1: 正态密度乘上指数权重后，相当于把钟形曲线水平平移；这正是两个 $N(d)$ 的区别所在。

20.6 平价关系与一个极易忽略的精度问题

有连续股息率时，欧洲看涨和看跌的平价关系是

$$C - P = S_0e^{-qT} - Ke^{-rT}.$$

20.7 为什么闭式解里必然出现两个不同的正态分布函数

在无套利定价的假设下（市场可连续交易、无交易成本、波动率及无风险利率在定价期间恒定），欧式看涨期权今天的价值可以写作

$$C_0 = e^{-rT} E^{\mathbb{Q}}[(S_T - K)^+].$$

这个式子说的不是“投资者按真实概率预计赚多少钱”，而是按风险中性权重计算未来收益，再以无风险利率折回今天。为了算出期望，我们必须知道 S_T 的分布。

在连续股息率 q 、波动率 σ 恒定的 GBM 模型下，

$$S_T = S_0 \exp\left[\left(r - q - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}Z\right], \quad Z \sim N(0, 1).$$

现在定义 $b = \sigma\sqrt{T}$ ，并设

$$a = \frac{\ln(K/S_0) - (r - q - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{b}.$$

期权只有在 $S_T > K$ 时才支付，而这等价于 $Z > a$ 。于是将看涨收益拆开：

$$\begin{aligned} C_0 &= e^{-rT} E^{\mathbb{Q}}[(S_T - K)\mathbf{1}_{\{Z > a\}}] \\ &= e^{-rT} (E^{\mathbb{Q}}[S_T \mathbf{1}_{\{Z > a\}}] - K \mathbb{Q}(Z > a)). \end{aligned}$$

这里有两项：一项涉及落在实值区时的股票价值，另一项只涉及落在实值区的概率。因而结果里出现两个不同的正态分布函数，并非符号装饰。

第二项最容易：

$$\mathbb{Q}(Z > a) = 1 - N(a) = N(-a).$$

定义

$$d_2 = -a = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

所以第二项对应 $N(d_2)$ 。它是这一模型里的风险中性行权概率。

第一项需要计算一个带指数权重的正态积分：

$$E[S_T \mathbf{1}_{\{Z > a\}}] = S_0 e^{(r - q - \sigma^2/2)T} \int_a^\infty e^{bz} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz.$$

关键代数是把指数中的平方配完整：

$$-\frac{z^2}{2} + bz = -\frac{(z - b)^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

因此

$$e^{bz} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = e^{b^2/2} \frac{e^{-(z-b)^2/2}}{\sqrt{2\pi}}.$$

令新变量 $u = z - b$ ，积分下限从 a 变成 $a - b$ ，原积分成为 $e^{b^2/2} N(b - a)$ 。前面本来有一个 $e^{-\sigma^2 T/2}$ ，恰好与此处的 $e^{b^2/2} = e^{\sigma^2 T/2}$ 抵消，最后得到

$$E[S_T \mathbf{1}_{\{Z > a\}}] = S_0 e^{(r - q)T} N(b - a).$$

定义 $d_1 = b - a = d_2 + b$ ，就得到了熟悉的闭式解：

$$C_0 = S_0 e^{-qT} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2).$$

因此 $N(d_1)$ 不是另外一个随意指定的“行权概率”；它来自用 S_T 作为权重的期望积分。两者的差恰好是 $\sigma\sqrt{T}$ 。

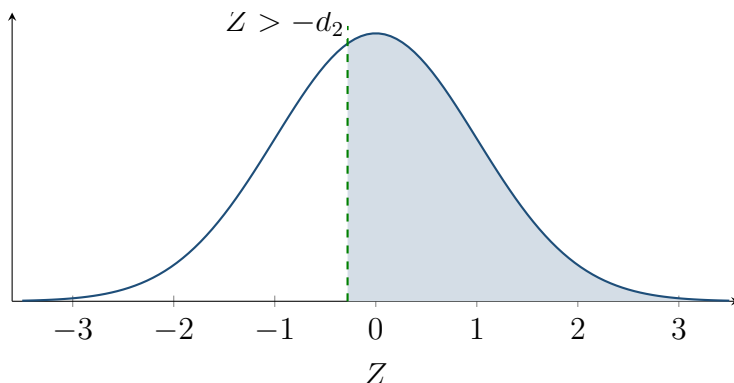


图 20.2: $N(d_2)$ 对应价格终点超过执行价的风险中性概率区域； $N(d_1)$ 则来自加入股票价格权重后的另一项积分。

用精确数值把两项重新装回去

取 $S_0 = 100, K = 105, T = 0.5, r = 0.04, q = 0.01, \sigma = 0.25$ 。先算

$$\sqrt{T} = 0.70710678,$$

$$b = \sigma\sqrt{T} = 0.17677670,$$

$$\ln(S_0/K) = -0.04879016,$$

$$(r - q + \sigma^2/2)T = 0.030625.$$

所以

$$d_1 \approx -0.10275769, \quad d_2 \approx -0.27953438.$$

继续查正态分布并代入原式，若中间项保留足够精度，得到

$$C_0 \approx 5.54816634.$$

看跌期权由带股息的平价关系

$$P_0 = C_0 - S_0 e^{-qT} + K e^{-rT}$$

求得 $P_0 \approx 8.96777912$ 。把两侧再相减，能恢复

$$C_0 - P_0 = S_0 e^{-qT} - K e^{-rT}.$$

20.8 Feynman–Kac: 一个定价公式怎样同时变成 PDE 与条件期望

Black–Scholes PDE 与风险中性期望并不是两套互相独立的理论。最容易看清它们关系的方法，是从某个足够光滑的函数 $V(t, S_t)$ 出发，把它的价格变化、无风险贴现和终点收益串起来。

在无股息的风险中性模型下， $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}}$ 。对 $V(t, S_t)$ 用 Itô 引理：

$$dV = \left(V_t + rSV_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} \right) dt + \sigma SV_S dW_t^{\mathbb{Q}}.$$

现在观察贴现价格 $M_t = e^{-rt}V(t, S_t)$ 。因为 e^{-rt} 是一个普通的可微函数，乘积法则给出

$$\begin{aligned} dM_t &= e^{-rt} dV - re^{-rt}V dt \\ &= e^{-rt} \left[V_t + rSV_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} - rV \right] dt \\ &\quad + e^{-rt}\sigma SV_S dW_t^{\mathbb{Q}}. \end{aligned}$$

若 V 满足 Black–Scholes PDE，方括号正好等于 0；在合适的可积性条件下，剩下的随机积分有条件期望 0。由此得到

$$E_t^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}V(T, S_T)] = e^{-rt}V(t, S_t).$$

若终端条件是 $V(T, S_T) = \Phi(S_T)$ ，把等式乘上 e^{rt} ：

$$V(t, S_t) = E_t^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}\Phi(S_T)].$$

这正是 Feynman–Kac 思想在这个简单模型中的表现。

两种表示各有所长：当终端 payoff 很简单、分布可算时，条件期望往往能直接积分成闭式；当 payoff 或边界复杂时，可以数值求 PDE；而包含复杂路径依赖的产品，通常更适合 Monte Carlo 或其他状态扩张方法。它们的共同基础是同一套随机过程、终端收益和无套利条件。

20.9 把闭式期权公式还原为两项正态积分

这一节只讨论最常见的情形：股价在风险中性测度 $\mathbb{Q}$ 下遵循带固定股息收益率 q 的 GBM，利率 r 、波动率 σ 都是常数，支付发生在到期日 T 。欧式看涨期权价格从贴现期望开始：

$$C_0 = e^{-rT} E^{\mathbb{Q}}[(S_T - K)^+].$$

“正部”符号意味着只有 $S_T > K$ 时才支付。将支付拆成两项：

$$C_0 = e^{-rT} \underbrace{E^{\mathbb{Q}}[S_T \mathbf{1}_{\{S_T > K\}}]}_{\text{股票价值项}} - K e^{-rT} \underbrace{\mathbb{Q}(S_T > K)}_{\text{行权概率项}}.$$

在该模型下，对数终值

$$Y = \ln S_T \sim N(m, s^2), \quad m = \ln S_0 + (r - q - \frac{1}{2}\sigma^2)T, \quad s = \sigma\sqrt{T}.$$

首先算第二项。事件 $S_T > K$ 等价于 $Y > \ln K$ ，标准化得

$$\mathbb{Q}(S_T > K) = \mathbb{P}\left(Z > \frac{\ln K - m}{s}\right) = N(d_2), \quad d_2 = \frac{m - \ln K}{s}.$$

接着看第一项。因为 $S_T = e^Y$ ，它是一个带指数权重的正态尾积分：

$$E[e^Y \mathbf{1}_{\{Y > \ln K\}}] = \int_{\ln K}^{\infty} e^y \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-(y-m)^2/(2s^2)} dy.$$

真正决定 d_1 来源的是下面这个配方步骤：

$$y - \frac{(y-m)^2}{2s^2} = -\frac{(y-m-s^2)^2}{2s^2} + m + \frac{1}{2}s^2.$$

于是积分可以化为

$$e^{m+s^2/2} \int_{\ln K}^{\infty} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-(y-m-s^2)^2/(2s^2)} dy = e^{m+s^2/2} N(d_1),$$

其中

$$d_1 = \frac{m + s^2 - \ln K}{s} = d_2 + s = d_2 + \sigma\sqrt{T}.$$

再注意

$$e^{-rT} e^{m+s^2/2} = e^{-rT} S_0 e^{(r-q)T} = S_0 e^{-qT}.$$

两部分合起来，便得到完整闭式解：

$$C_0 = S_0 e^{-qT} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2).$$

这也解释了两个正态分布函数为什么不同。第二项只关心事件是否发生，得到普通的尾概率 $N(d_2)$ ；第一项关心事件发生时的股价大小，因 e^Y 的加权而在正态密度里产生了均值平移 s^2 ，得到 $N(d_1)$ 。把这一步看清楚，以后就不必靠记忆来区分两个 d 。

20.10 在同一个报价例子里统一 Greeks 的单位

仍取 $S_0 = 100, K = 105, T = 0.5, r = 4\%, q = 1\%, \sigma = 25\%$ 。通过完整精度的正态函数得到的期权价格约为 5.55。对股价和波动率求导，在 Black-Scholes 模型里有

$$\Delta = e^{-qT} N(d_1), \quad \Gamma = \frac{e^{-qT} \varphi(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}, \quad \text{Vega} = S_0 e^{-qT} \varphi(d_1) \sqrt{T}.$$

从这个参数集计算，Delta 约为 0.457，Gamma 约为 0.0223，Vega 约为 27.9。这里 Vega 的单位尤其值得说明：Vega ≈ 27.9 对应波动率的绝对改变量 1.00（即 100 个百分点）。若隐含波动率只上升一个波动率百分点， $\Delta\sigma = 0.01$ ，期权价格的一阶变化约为

$$\Delta C \approx 27.9 \times 0.01 = 0.279.$$

同样，Delta 对应股价变化一元的价格变化；Gamma 是股价变化二阶项的系数。把敏感度写在交易报告上时，必须同时写清楚单位，否则虽然看起来只差一个比例换算，风险数字却可能相差一百倍。

第 21 章

Greeks 与隐含波动率

Greeks 就是“轻轻推一下输入，价格动多少”

价格敏感度

Delta、Gamma、Vega 和 Theta 分别衡量价格对标的价格、二阶价格变化、波动率与时间的局部敏感度。使用这些导数时，必须同时注明头寸方向、计量单位和参数变动幅度。

Delta-Gamma 的慢动作

若 $\Delta = 0.45, \Gamma = 0.02$ ，股价上涨 2 元：

一阶贡献 $= 0.45 \times 2 = 0.90$ ；

二阶贡献 $= \frac{1}{2} \times 0.02 \times 2^2 = 0.04$ ；

因此价格变化近似 0.94。

如果你只用 Delta，会少算 0.04，这就是曲率的影响。

IV Newton 为什么用 Vega

隐含波动率要求解 $C_{BS}(\sigma) = C_{mkt}$ 。Newton 修正量是“价格误差 / 价格对波动率的斜率”。而这个斜率正是 Vega，所以

$$\sigma_{new} = \sigma_{old} - \frac{C_{BS} - C_{mkt}}{\text{Vega}}.$$

21.1 Delta、Gamma、Vega

例题

继续用上一章参数。则

$$\Delta = e^{-qT} N(d_1) \approx e^{-0.005} \times 0.4591 \approx 0.4568.$$

Gamma:

$$\Gamma = \frac{e^{-qT} \phi(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}.$$

若 $\phi(d_1) \approx 0.3968$, 则

$$\Gamma \approx \frac{0.9950 \times 0.3968}{100 \times 0.25 \times 0.7071} \approx 0.0223.$$

Vega:

$$\nu = S_0 e^{-qT} \phi(d_1) \sqrt{T} \approx 27.9.$$

21.2 隐含波动率的 Newton 法

例题

若市场价 $C_{mkt} = 5.80$, 而用 $\sigma_0 = 25\%$ 得模型价 5.55, 误差是

$$f(\sigma_0) = 5.55 - 5.80 = -0.25.$$

若 Vega 约为 27.9, 则

$$\sigma_1 = 0.25 - \frac{-0.25}{27.9} = 0.25896.$$

也就是把波动率提高到约 25.90%。

21.3 Delta-Gamma-Vega 一起做一个情景 P&L

例题

假设某期权

$$\Delta = 0.46, \quad \Gamma = 0.022, \quad \text{Vega} = 28.$$

若标的上涨 $\Delta S = 2$, 隐含波动率上涨 1 个百分点, 即 $\Delta\sigma = 0.01$, 则

$$\Delta V \approx \Delta\Delta S + \frac{1}{2}\Gamma(\Delta S)^2 + \text{Vega}\Delta\sigma.$$

逐项:

$$\Delta\text{项} = 0.46 \times 2 = 0.92,$$

$$\Gamma\text{项} = \frac{1}{2} \times 0.022 \times 4 = 0.044,$$

$$\text{Vega 项} = 28 \times 0.01 = 0.28.$$

总变动

$$\Delta V \approx 0.92 + 0.044 + 0.28 = 1.244.$$

常见误算

Newton 法失灵的常见原因:

- Vega 太小 (深实值/深虚值、临近到期);
- 初值太差;
- 市场价格本身违反套利边界。

21.4 Greeks 从闭式公式到价格变化, 逐个算出来

为便于查表, 选取一组对称参数: $S_0 = K = 100$, $T = 1$ 年, $r = q = 0$, 波动率 $\sigma = 0.20$ 。这时

$$d_1 = \frac{0 + \frac{1}{2}(0.2)^2}{0.2} = 0.10, \quad d_2 = -0.10.$$

查标准正态表, $N(0.10) = 0.5398278$, $N(-0.10) = 0.4601722$, 因此

$$C = 100(0.5398278 - 0.4601722) = 7.96556.$$

Delta 对股票价格求偏导, 得到

$$\Delta = N(d_1) = 0.5398278.$$

看涨期权的 Gamma 为

$$\Gamma = \frac{\phi(d_1)}{S_0\sigma\sqrt{T}}, \quad \phi(0.10) = \frac{e^{-0.10^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.3969525.$$

逐项除法给出

$$\Gamma = \frac{0.3969525}{100 \times 0.20 \times 1} \approx 0.0198476.$$

Vega 为 $\nu = S_0 \phi(d_1) \sqrt{T} = 39.6953$ 。它的单位须特别说明：这个 39.6953 是波动率由 0 增加到 1 时的一阶价格灵敏度，若波动率提高 1 个百分点 (0.01)，一阶价格变化约为 0.39695，而不是 39.6953。

如果标的价格上涨 1 元，我们可以在不重新代入整个 Black-Scholes 公式的情况下先做二阶预测：

$$\begin{aligned} \Delta C &\approx \Delta \Delta S + \frac{1}{2} \Gamma (\Delta S)^2 \\ &= 0.5398278 \times 1 + \frac{1}{2} \times 0.0198476 \times 1^2 \\ &= 0.5398278 + 0.0099238 = 0.5497516. \end{aligned}$$

所以新价格约为 $7.96556 + 0.54975 = 8.51531$ 。二阶项约占 0.01 元；股价变动较小时它不大，却解释了为什么“Delta 固定不变”的近似会逐渐偏离真实重新定价的结果。

21.5 隐含波动率：为什么不直接把公式反解

股票价格、执行价、利率和到期时间都已知，市场却只给出一个期权报价。需要反推波动率 σ ，数学上就是求根：

$$f(\sigma) = C_{BS}(\sigma) - C_{market} = 0.$$

虽然 Black-Scholes 有闭式定价公式，却没有简单的闭式反解波动率公式，因为 σ 同时出现在 d_1, d_2 的分子和分母中，又被套进了正态 CDF。Newton 法的导数恰好是 Vega：

$$\sigma_{new} = \sigma_{old} - \frac{C_{BS}(\sigma_{old}) - C_{market}}{\nu(\sigma_{old})}.$$

例如市场价为 8.30，而初始 $\sigma_0 = 0.20$ 时模型价为 7.96556。价格误差是 -0.33444，Vega 约为 39.6953，因此

$$\sigma_1 = 0.20 - \frac{-0.33444}{39.6953} \approx 0.208425.$$

新波动率约为 20.8425%。此时应重新计算 d_1, d_2 、模型价和 Vega，再继续下一轮；只要报价处于无套利界内，且 Vega 不过小，通常不需要很多轮。

数值求根前先检查边界

在 $r = q = 0$ 且 $S_0 = K = 100$ 时，欧洲看涨价格必须处于 0 与 100 之间。如果输入的市场价为负或大于 100，就不应直接进入 Newton 迭代；先检查报价口径、合约乘数和是否把价格与权利金总额混淆。

21.6 Greeks 与价格敏感度

令期权价格为 $C(S, \sigma, t)$ 。暂时固定剩余到期时间，考察股价变化 ΔS 、隐含波动率变化 $\Delta \sigma$ 。在变化较小时，一阶和二阶 Taylor 展开给出

$$\Delta C \approx \underbrace{C_S \Delta S}_{\text{Delta}} + \underbrace{\frac{1}{2} C_{SS} (\Delta S)^2}_{\text{Gamma}} + \underbrace{C_\sigma \Delta \sigma}_{\text{Vega}}.$$

这里暂时没有包括交叉导数项 $C_{S\sigma} \Delta S \Delta \sigma$ ，也没有包括时间经过的 Theta 项。因此这只是一种**局部近似**，并非任何大幅行情都成立的恒等式。

例如在 $S = 100, K = 105, T = 0.5, r = 4\%, q = 1\%, \sigma = 25\%$ 处，计算得到

$$\Delta \approx 0.456788, \quad \Gamma \approx 0.0223368, \quad \nu \approx 27.92098.$$

注意 Vega 这里的口径是“ σ 增加 1.00 个绝对单位的价格变化”。如果交易台把波动率的 1 个百分点叫做 1 vol point，那么对应的每一点 Vega 应是 $27.92098 \times 0.01 \approx 0.27921$ 。两种数字都可以使用，但单位不能混在一起。

股票上涨 2 元、波动率上升 1 个百分点

假设变化在几乎同一时刻发生，忽略利息与时间流逝： $\Delta S = 2, \Delta \sigma = 0.01$ 。各项近似是

$$\text{Delta} : 0.456788 \times 2 = 0.913576,$$

$$\text{Gamma} : \frac{1}{2} \times 0.0223368 \times 2^2 = 0.044674,$$

$$\text{Vega} : 27.92098 \times 0.01 = 0.279210.$$

所以预计期权价格上涨约

$$\Delta C_{\text{approx}} = 0.913576 + 0.044674 + 0.279210 = 1.237460.$$

但如果直接把新参数 $S = 102, \sigma = 0.26$ 代入 Black-Scholes 闭式解，得到新价格

$$C(102, 0.26) \approx 6.792524,$$

原价 5.548166，真实模型价格变化约 1.244357，比近似高 0.006897。这一差异主要来自交叉项和更高阶项，而不是前面公式算错。

21.7 把 Delta 对冲写成股票与现金账户

假设交易台**卖出** 100 份上述欧式 Call，并在卖出同时按 Delta 中性原则买入 $100\Delta \approx 45.6788$ 股股票。卖出期权收到

$$100 \times 5.548166 = 554.8166,$$

买入股票需要

$$45.6788 \times 100 = 4567.88.$$

因此初始现金账户是负的（表示融资借款），约为 $554.82 - 4567.88 = -4013.06$ 。

如果随后股价瞬时由 100 升至 102，波动率也由 25% 升至 26%，股票头寸盈利约

$$45.6788 \times 2 = 91.3576.$$

卖出的 100 份期权则亏损约

$$100 \times (6.792524 - 5.548166) = 124.4358.$$

忽略融资利息、交易成本与重新对冲前的持有时间，组合净亏约 $124.4358 - 91.3576 = 33.0782$ 元。第一阶股价变化已经相互抵消，剩下的主要是 Gamma、Vega 和更高阶变化。



图21.1 Delta 中性组合的一阶风险与剩余高阶风险。

这也是交易中的“动态”一词为什么重要：股价改变后 Delta 本身通常会变，旧的股票持仓不再保证新的 Delta 中性。真实交易还会产生手续费、滑点与融资成本，它们未被上面的瞬时示例计入。

专题 G

Black–Scholes：从对数正态积分到两项正态概率

Black–Scholes 公式最后出现 $N(d_1)$ 与 $N(d_2)$ ，很多读者将它们当成两个必须死记的符号。本章直接从风险中性期望出发，逐步算出这两项究竟来自哪里。

G.1 将期权 payoff 写成两部分

假定股票无股息，利率与波动率常数，风险中性下

$$S_T = S_0 \exp\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}Z\right], \quad Z \sim N(0, 1).$$

欧式看涨到期 payoff 是 $(S_T - K)^+$ 。注意代数恒等式：

$$(S_T - K)^+ = S_T \mathbf{1}_{S_T > K} - K \mathbf{1}_{S_T > K}.$$

因此其现值为

$$C_0 = e^{-rT} E^{\mathbb{Q}}[S_T \mathbf{1}_{S_T > K}] - K e^{-rT} \mathbb{Q}(S_T > K).$$

G.2 先算比较简单的概率项

条件 $S_T > K$ 等价于

$$\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}Z > \ln(K/S_0).$$

两边移项并除 $\sigma\sqrt{T}$ ：

$$Z > \frac{\ln(K/S_0) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} = -d_2.$$

定义

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad \mathbb{Q}(S_T > K) = N(d_2).$$

于是 payoff 中减去的执行价项，贡献的是 $K e^{-rT} N(d_2)$ 。

G.3 股价项为何是 $N(d_1)$

先把股价期望展开成标准正态积分：

$$E^{\mathbb{Q}}[S_T \mathbf{1}_{S_T > K}] = S_0 e^{(r - \sigma^2/2)T} \int_{-d_2}^{\infty} e^{\sigma\sqrt{T}z} \phi(z) dz.$$

其中 $\phi(z) = (2\pi)^{-1/2} e^{-z^2/2}$ 。令 $a = \sigma\sqrt{T}$ 。指数的核心恒等式是完成平方：

$$e^{az} \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2 + az} = e^{a^2/2} \phi(z - a).$$

于是

$$\begin{aligned} \int_{-d_2}^{\infty} e^{az} \phi(z) dz &= e^{a^2/2} \int_{-d_2}^{\infty} \phi(z - a) dz \\ &= e^{a^2/2} \int_{-d_2 - a}^{\infty} \phi(u) du \\ &= e^{a^2/2} N(d_2 + a). \end{aligned}$$

从对数正态积分到期权价格

在风险中性测度下，采用连续股息率 δ 的几何布朗运动满足

$$dS_t = (r_c - \delta)S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}}.$$

由 Itô 引理， $\ln S_T$ 可写成

$$\ln S_T = \ln S_0 + (r_c - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z, \quad Z \sim N(0, 1).$$

期末看涨支付为 $(S_T - K)^+$ 。令 $a = \sigma\sqrt{T}$ ， $m = \ln S_0 + (r_c - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)T$ ，则条件 $S_T > K$ 等价于

$$Z > k, \quad k = \frac{\ln K - m}{a}.$$

先计算行权概率

在定价测度下， $\mathbb{Q}(S_T > K) = \mathbb{Q}(Z > k) = N(-k)$ 。将阈值整理，

$$-k = \frac{\ln(S_0/K) + (r_c - \delta - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_2.$$

于是贴现后的执行价支付这一部分是 $Ke^{-r_c T}N(d_2)$ 。

为什么另一项出现了 d_1

股票支付部分需要算 $E^{\mathbb{Q}}[S_T \mathbf{1}_{S_T > K}]$ 。代入 $S_T = e^{m+aZ}$ 后，

$$E^{\mathbb{Q}}[S_T \mathbf{1}_{Z > k}] = e^m \int_k^{\infty} e^{az} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz.$$

指数中的二次式可以精确配方，

$$az - \frac{1}{2}z^2 = -\frac{1}{2}(z - a)^2 + \frac{1}{2}a^2.$$

因此积分等于

$$e^{m+a^2/2} \int_k^{\infty} \varphi(z - a) dz = e^{m+a^2/2} N(a - k).$$

因为 $e^{m+a^2/2} = S_0 e^{(r_c - \delta)T}$ ，而 $a - k = d_2 + a = d_1$ ，得到

$$E^{\mathbb{Q}}[S_T \mathbf{1}_{S_T > K}] = S_0 e^{(r_c - \delta)T} N(d_1).$$

最后乘贴现因子，

$$C_0 = S_0 e^{-\delta T} N(d_1) - K e^{-r_c T} N(d_2).$$

两项正态分布概率的参数不同，来自期权支付中两种不同的积分。 $N(d_2)$ 是定价测度下的行权概率； $N(d_1)$ 在期权 Delta 中出现，也可在经过股票价格加权后的概率表达式中解释。

完整数值核验

取 $S_0 = 100, K = 105, T = 0.5, r_c = 0.04, \delta = 0.01, \sigma = 0.25$, 则

$$\begin{aligned}\sigma\sqrt{T} &= 0.1767766953, \\ \ln(S_0/K) &= -0.0487901642, \\ (r_c - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2)T &= 0.030625, \\ d_1 &= -0.1027576861, \quad d_2 = -0.2795343814.\end{aligned}$$

由数值积分或标准正态累积分布表求得 $C_0 = 5.54816634$, 看跌价格 $P_0 = 8.96777912$ 。二者之差 -3.41961278 与 $S_0e^{-\delta T} - Ke^{-r_c T}$ 完全一致 (保留上述精度)。

Delta 与 Gamma 的求导细节

欧式看涨的 Delta 定义为股票价格变化一个单位时的瞬时价格变化率, 因而需要对 $C_0(S_0)$ 求导。两项中的 d_1 和 d_2 都依赖 S_0 , 不可将它们当成常数。直接用乘积法则与链式法则,

$$\begin{aligned}\frac{\partial C_0}{\partial S_0} &= e^{-\delta T} N(d_1) + S_0 e^{-\delta T} \varphi(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S_0} \\ &\quad - K e^{-r_c T} \varphi(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial S_0}.\end{aligned}$$

由 $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T}$ 可知, 两个导数都等于 $1/(S_0\sigma\sqrt{T})$ 。此外, 正态密度与 d_1, d_2 的定义给出恒等式

$$S_0 e^{-\delta T} \varphi(d_1) = K e^{-r_c T} \varphi(d_2).$$

因此, 链式法则产生的两项完全抵消, 留下

$$\Delta = e^{-\delta T} N(d_1).$$

再对 S_0 求一次导数, 得到

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S_0} = \frac{e^{-\delta T} \varphi(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}.$$

Vega 对波动率小数 σ 求导, 结果为 $\nu = S_0 e^{-\delta T} \varphi(d_1) \sqrt{T}$ 。

用数值微分再检查一次

保持其它参数不变, 取股票价格扰动 $h = 0.01$, 采用中心差分

$$\Delta \approx \frac{C(S_0 + h) - C(S_0 - h)}{2h} = 0.45678798.$$

对波动率使用扰动 $\varepsilon = 0.0001$, 中心差分给出

$$\frac{C(\sigma + \varepsilon) - C(\sigma - \varepsilon)}{2\varepsilon} = 27.92098309,$$

与解析 Vega 27.92098318 一致。波动率若提高一个百分点, 线性价格改变量约为 $27.92098318 \times 0.01 = 0.27920983$ 。计算时必须将百分点换成小数。

而 $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T}$, 故

$$E^{\mathbb{Q}}[S_T \mathbf{1}_{S_T > K}] = S_0 e^{(r-\sigma^2/2)T} e^{\sigma^2 T/2} N(d_1) = S_0 e^{rT} N(d_1).$$

贴现后恰好是 $S_0 N(d_1)$ 。合并两部分：

$$C_0 = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2).$$

G.4 连续股息率如何进入公式

若股票支付连续股息率 q , 将风险中性股价漂移改为 $r - q$ 。上述推导只需把 $S_0 e^{rT}$ 的中间结果改成 $S_0 e^{(r-q)T}$, 最终公式为

$$C_0 = S_0 e^{-qT} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2), \quad d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

G.5 将公式拆成独立可核对的数字

取 $S_0 = K = 100$, $r = q = 0$, $T = 1$, $\sigma = 0.20$ 。这是先理解结构最好的参数组合：

$$\ln(S_0/K) = 0, \quad \sigma\sqrt{T} = 0.2, \quad d_1 = (0 + 0.5 \times 0.2^2)/0.2 = 0.1, \quad d_2 = -0.1.$$

查标准正态表 $N(0.1) = 0.5398278$, $N(-0.1) = 0.4601722$, 所以

$$C_0 = 100(0.5398278 - 0.4601722) = 7.96556.$$

利用 Put-Call parity, $C - P = S_0 - K = 0$, 所以欧式看跌价格也为 7.96556。这个检验不需要重新代入 put 闭式公式。

7 Black-Scholes 公式中的两个正态分布函数

7.1 先求在风险中性测度下行权的概率

对支付连续股息率 q 的股票，风险中性 GBM 给出

$$S_T = S_0 \exp \left[\left(r - q - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma \sqrt{T} Z \right], \quad Z \sim N(0, 1).$$

看涨期权到期支付为 $(S_T - K)^+$ 。只有 $S_T > K$ 时支付为正。对不等式取对数，并把 Z 单独留在另一边，

$$Z > \frac{\ln(K/S_0) - (r - q - \frac{1}{2} \sigma^2) T}{\sigma \sqrt{T}} = -d_2.$$

其中

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q - \frac{1}{2} \sigma^2) T}{\sigma \sqrt{T}}.$$

因此 $Q(S_T > K) = Q(Z > -d_2) = N(d_2)$ 。折现后的执行价一项便是 $Ke^{-rT}N(d_2)$ 。

7.2 股票价格项为何出现 d_1

期权的风险中性价格可以拆成

$$C_0 = e^{-rT} \{ E^Q[S_T \mathbf{1}_{\{S_T > K\}}] - KQ(S_T > K) \}.$$

把 S_T 写成 $S_0 e^{m + \sigma \sqrt{T} Z}$ ，其中 $m = (r - q - \sigma^2/2)T$ 。第一项成为

$$S_0 e^{-rT+m} \int_{-d_2}^{\infty} e^{\sigma \sqrt{T} z} \phi(z) dz.$$

标准正态密度为 $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$ 。令 $a = \sigma \sqrt{T}$ ，对指数完成平方，

$$az - \frac{z^2}{2} = -\frac{(z-a)^2}{2} + \frac{a^2}{2}.$$

因此

$$\int_{-d_2}^{\infty} e^{az} \phi(z) dz = e^{a^2/2} \int_{-d_2}^{\infty} \phi(z-a) dz = e^{a^2/2} N(d_2 + a).$$

定义 $d_1 = d_2 + a$ ，再注意 $e^{-rT+m+a^2/2} = e^{-qT}$ ，便得到

$$e^{-rT} E^Q[S_T \mathbf{1}_{\{S_T > K\}}] = S_0 e^{-qT} N(d_1).$$

两项合并后，

$$C_0 = S_0 e^{-qT} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2).$$

第一项对终点股价作了加权积分，第二项只计算超过执行价的概率；这解释了公式里为什么会出现两个不同的正态分布函数。

7.3 一组参数从中间数算到最终价格

设 $S_0 = 100$ 、 $K = 105$ 、 $T = 0.5$ 、 $r = 0.04$ 、 $q = 0.01$ 、 $\sigma = 0.25$ 。

$$\sigma\sqrt{T} = 0.25\sqrt{0.5} = 0.176776695,$$

$$\ln(S_0/K) = \ln(100/105) = -0.048790164,$$

$$(r - q + \frac{1}{2}\sigma^2)T = (0.04 - 0.01 + 0.03125) \times 0.5 = 0.030625.$$

所以

$$d_1 = \frac{-0.048790164 + 0.030625}{0.176776695} = -0.102757686, \quad d_2 = -0.279534381.$$

查正态分布, $N(d_1) = 0.459077645$ 、 $N(d_2) = 0.389917378$ 。继续算两项现值,

$$S_0 e^{-qT} N(d_1) = 100 e^{-0.005} (0.459077645) \approx 45.6788,$$

$$K e^{-rT} N(d_2) = 105 e^{-0.02} (0.389917378) \approx 40.1306.$$

最终得到 $C_0 \approx 5.54817$ 。若另一份讲义把它写成 5.58, 差异主要来自过早四舍五入, 复核时应当保留 d_1, d_2 和正态函数至少五位有效数字。

用看跌公式计算得 $P_0 \approx 8.96778$, 二者之差 -3.41961 与

$$S_0 e^{-qT} - K e^{-rT} \approx -3.41961$$

相等。Put-Call parity 因而提供了独立的数值检验。

Black-Scholes 数值精度与独立复核

设 $S_0 = 100, K = 105, T = 0.5, r = 0.04, q = 0.01, \sigma = 0.25$ 。采用连续复利与连续股息率，欧式看涨定价式为

$$C = S_0 e^{-qT} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2), \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

将所需的中间量逐个保留足够位数：

$$\sigma\sqrt{T} = 0.1767766953,$$

$$\ln(S_0/K) = -0.0487901642,$$

$$(r - q + \sigma^2/2)T = 0.0306250000,$$

$$d_1 = -0.1027576861,$$

$$d_2 = -0.2795343814.$$

对应标准正态累积分布函数为 $N(d_1) = 0.459077645$ 、 $N(d_2) = 0.389917378$ ，因而

$$C = 5.54816634.$$

用看跌定价检查数值

从欧式看跌公式得到 $P = 8.96777912$ ，两者之差为 $C - P = -3.41961278$ 。在连续股息假设下，平价关系要求

$$C - P = S_0 e^{-qT} - K e^{-rT},$$

右端的数值同样为 -3.41961278 ，误差只剩最后的数值舍入。

Greeks 的统一口径

在同一参数下，

$$\Delta = e^{-qT} N(d_1) = 0.45678799, \quad \Gamma = \frac{e^{-qT} \varphi(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}} = 0.02233679,$$

$$\nu = S_0 e^{-qT} \varphi(d_1) \sqrt{T} = 27.92098318.$$

Vega 27.92098 表示波动率小数变化 1.00 时的一阶价格变化；若波动率上升 1 个百分点，使用 $\Delta\sigma = 0.01$ ，所以 Vega 项约为 0.2792098。若 S 由 100 升至 102， σ 由 0.25 升至 0.26，保持其它参数不变，Delta-Gamma-Vega 二阶近似给出

$$\Delta C \approx 0.45678799(2) + \frac{1}{2}(0.02233679)(2)^2 + 27.92098318(0.01) = 1.23745938.$$

直接重新定价得到 $C_{\text{new}} = 6.79252372$ ，实际变动 1.24435738。两种结果相差 0.00689800，主要来自未纳入的交叉项与更高阶项。

第八部分

数值方法

Zoey Lin

第 22 章

Monte Carlo：价格之外，还要看标准误

Monte Carlo 就是“模拟很多个未来，再做平均”

路径模拟与期望

当支付函数的期望难以解析计算时，可以从给定的概率模型中模拟多条路径。分别计算各路径的贴现支付，再取样本平均作为价格估计。估计精度还须结合样本方差与标准误报告。

从 4 条路径开始看

假设 4 条贴现 payoff 是 0, 4, 2, 6。价格估计就是

$$\bar{X} = (0 + 4 + 2 + 6)/4 = 3.$$

但 3 不是“精确答案”。我们还需要标准差和标准误，告诉自己这个 3 有多不稳定。

结果核对

标准误随 $1/\sqrt{N}$ 缩小，因此要把误差减半，通常需要约 4 倍路径。这个规律比“多跑一些路径”更重要。

例题

假设 8 条贴现 payoff 为：0, 4, 2, 8, 0, 6, 3, 5。均值：

$$\bar{X} = \frac{28}{8} = 3.5.$$

样本方差：

$$s^2 = \frac{(0 - 3.5)^2 + \dots + (5 - 3.5)^2}{7} = 8, \quad s = 2.8284.$$

标准误：

$$SE = \frac{s}{\sqrt{8}} = 1.0.$$

95% 置信区间：

$$3.5 \pm 1.96 \times 1.0 = [1.54, 5.46].$$

22.1 一条 Monte Carlo 路径是怎么造出来的

例题

假设风险中性 GBM： $S_0 = 100, r = 4\%, \sigma = 20\%$ ，一年分成 4 步，所以 $\Delta t = 0.25$ 。
单步精确离散：

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp \left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z \right].$$

取第一步随机数 $Z_1 = 0.5$ ：

$$\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \Delta t = (0.04 - 0.02) \times 0.25 = 0.005,$$

$$\sigma \sqrt{\Delta t} Z_1 = 0.2 \times 0.5 \times 0.5 = 0.05.$$

因此

$$S_{0.25} = 100e^{0.055} \approx 105.65.$$

第二步再从 105.65 出发，抽新的 Z_2 ，重复同一公式即可。

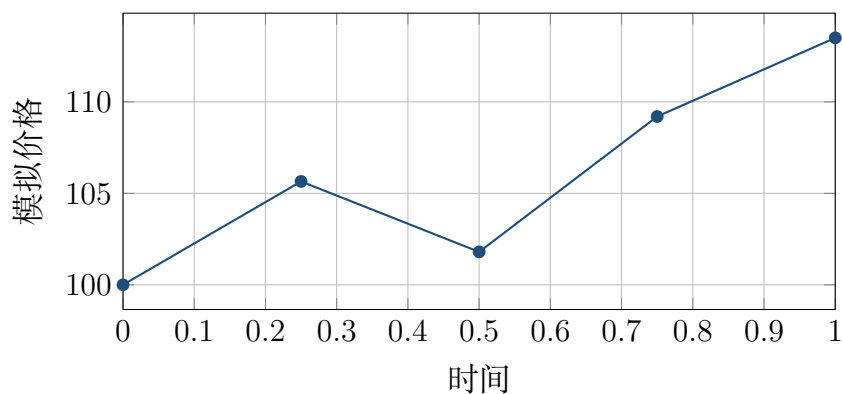


图22.1 Monte Carlo 模拟路径的随机增长因子。

结果核对

路径数翻 4 倍，误差大约减半；路径数翻 100 倍，误差大约降到原来的 1/10。这是 Monte Carlo 最重要的数量级直觉之一。

22.2 四条路径完整从 Z 算到期权 payoff

说明

Monte Carlo 并不要求你先随机生成“股票价格”。你生成的是标准正态冲击 Z ，然后把这个冲击塞进模型的精确价格公式，自然就得到一条未来价格。

从四个标准正态抽样值开始

欧式 Call: $S_0 = 100, K = 100, T = 1, r = 5\%, \sigma = 20\%$ ，无股息。风险中性 GBM 的终值：

$$S_T = 100 \exp \left[(0.05 - 0.20^2/2) \times 1 + 0.20Z \right] = 100e^{0.03+0.2Z}.$$

为了便于跟算，我们固定四个“演示用”的正态抽样值 $(-1, 0, 1, 0.5)$ ：

Z	S_T	$\max(S_T - 100, 0)$	$e^{-0.05} \times \text{payoff}$
-1	84.3665	0	0
0	103.0455	3.0455	2.8969
1	125.8600	25.8600	24.5988
0.5	113.8828	13.8828	13.2058

四条路径贴现 payoff 的均值为

$$\hat{C}_4 = \frac{0 + 2.8969 + 24.5988 + 13.2058}{4} \approx 10.1754.$$

注意这只是四路径模拟估计，并不意味着“期权真实理论价值就是 10.1754”。

结果核对

试试脑中预测：如果你抽到许多更大的 Z ，Call payoff 通常会更大。路径太少时容易碰巧抽多了大的冲击，所以必须和标准误差一起报告结果。

22.3 样本均值的不确定性：为什么要多跑四倍路径

例题

若某次模拟给出样本标准差 $s = 8$ ，路径数 $N = 64$ ，那么均值的标准误

$$SE = \frac{s}{\sqrt{N}} = \frac{8}{\sqrt{64}} = 1.$$

想把标准误从 1 压到约 0.5，若 s 基本不变，需要

$$0.5 = \frac{8}{\sqrt{N}} \Rightarrow \sqrt{N} = 16 \Rightarrow N = 256.$$

不是 128 条，而是 **256 条**，恰好是原来的四倍。

22.4 Monte Carlo 到底随机了什么、平均了什么

Monte Carlo 并不是任意生成一串价格再取平均，而是在某个**已指定的概率模型**下生成大量可能的未来路径，对每条路径计算合约收益，最后平均并贴现。对于欧式期权，只需模拟期末价格；对于亚洲期权、障碍期权，则需要保存路径上多个时刻的信息。

仍考虑 GBM，在风险中性测度下可以直接模拟终点：

$$S_T = S_0 \exp \left[\left(r - q - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma \sqrt{T} Z \right], \quad Z \sim N(0, 1).$$

如果 $S_0 = 100$, $r = 4\%$, $q = 1\%$, $\sigma = 25\%$, $T = 0.5$ ，则指数中的固定部分为

$$(r - q - \sigma^2/2)T = (0.03 - 0.03125) \times 0.5 = -0.000625,$$

随机部分系数是 $\sigma\sqrt{T} \approx 0.1767767$ 。例如取四个示意正态抽样值 $Z = -1, -0.2, 0.5, 1.2$ ，便得到下表。

Z	对数增长 $-0.000625 + 0.176777Z$	S_T (约)	$\max(S_T - 105, 0)$ (约)
-1.0	-0.177402	83.75	0
-0.2	-0.035980	96.47	0
0.5	0.087763	109.17	4.17
1.2	0.211507	123.56	18.56

这四个数仅是示意抽样，样本太少，绝不能据此断言期权的合理价格。若按这四条路径估计，贴现均值约为 $e^{-0.02}(0 + 0 + 4.17 + 18.56)/4 \approx 5.57$ ；碰巧靠近 Black-Scholes 真值，也不代表抽样精度足够。

22.5 标准误为什么不是路径收益的标准差

设每条路径的贴现后收益为 Y_i 。价格估计量是 $\hat{C} = \bar{Y} = (1/N) \sum_{i=1}^N Y_i$ 。样本标准差 s 描述的是单条路径收益的离散程度；我们关心的是平均值 $\bar{Y}$ 的不确定性，因此标准误才是

$$\widehat{SE}(\hat{C}) = \frac{s}{\sqrt{N}}.$$

例如八条路径的贴现收益是 0, 4, 2, 8, 0, 6, 3, 5，均值 3.5，样本方差恰好是 8，标准差是 $\sqrt{8} \approx 2.8284$ 。但平均值的标准误是 $2.8284/\sqrt{8} = 1$ 。在适用中心极限定理的条件下，一个近似 95% 区间为 3.5 ± 1.96 。这个区间宽得足以提醒我们：八条路径远远不够。

22.6 反变量为何有效：一条上涨冲击配一条下跌冲击

对单调看涨期权收益，正态随机数 Z 较大时，收益通常较大； $-Z$ 则与之相反。因此可以把 Z 与 $-Z$ 配对，先对每对收益求平均：

$$\bar{Y}_{\text{pair}} = \frac{Y(Z) + Y(-Z)}{2}.$$

假设 $\text{Var}(Y(Z)) = v$ ，两条配对收益之间协方差是 c 。则

$$\text{Var}(\bar{Y}_{\text{pair}}) = \frac{v + v + 2c}{4} = \frac{v + c}{2}.$$

若 $c < 0$ ，配对平均的方差小于两条独立收益平均的 $v/2$ 。降方差的原因清楚地体现在那一项负协方差里。反变量未必对所有非单调收益都产生同等效果，应该用实测的配对方差来检验。

22.7 控制变量为什么不变期望

设我们要求 $E[Y]$ ，同时容易得到某个与 Y 高度相关、且期望已知的变量 X 。考虑新估计量

$$Y^* = Y - \beta(X - E[X]).$$

其期望为

$$E[Y^*] = E[Y] - \beta(E[X] - E[X]) = E[Y].$$

所以无论 β 取何值，理论期望都不变。恰当选择 β 则可减小方差。对方差展开并求导得

$$\beta^* = \frac{\text{Cov}(Y, X)}{\text{Var}(X)}.$$

在实际程序中，若利用同一份样本估计 β ，还要考虑估计误差对有限样本性质的影响。控制变量是降低抽样噪声，不是修正错误的模型假设。

第 23 章

反变量、控制变量与 Cholesky

控制变量与估计方差

三种数值工具

反变量法利用成对的随机输入减少估计方差；控制变量法借助已知期望修正样本波动；Cholesky 分解用于构造具有指定协方差的随机向量。这些工具解决的数值问题各不相同。

反变量最小例子

若某 payoff 对 $Z = 1$ 算出 10，对 $Z = -1$ 算出 2，两条路径平均是 6。另一个随机抽样可能得到 13 和 1，平均是 7。配对通常比单独抽样更平滑，因为两个方向的随机偏差会互相抵消一部分。

23.1 控制变量

例题

若目标估计量样本均值 $\bar{Y} = 5.4$ ，控制变量样本均值 $\bar{X} = 102$ ，且已知 $E[X] = 100$ ，取 $\beta = 0.08$ ，则修正估计

$$\bar{Y}^* = \bar{Y} - \beta(\bar{X} - E[X]) = 5.4 - 0.08 \times 2 = 5.24.$$

23.2 3×3 Cholesky

例题

相关矩阵

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.5 & 1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cholesky 下三角矩阵可算得

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.8660 & 0 \\ 0.2 & 0.2309 & 0.9522 \end{pmatrix}.$$

若独立标准正态 $z = (1, -0.5, 0.8)^T$, 则相关冲击 $x = Lz$,

$$x_1 = 1,$$

$$x_2 = 0.5 \times 1 + 0.8660 \times (-0.5) = 0.0670,$$

$$x_3 = 0.2 - 0.1155 + 0.7618 = 0.8463.$$

23.3 有限差分其实是加权平均：一张三点网格的慢动作

说明

把空间切成格子，就能用相邻格点的值近似曲率。它本质上是把连续方程转成一串普通四则运算或线性方程组。

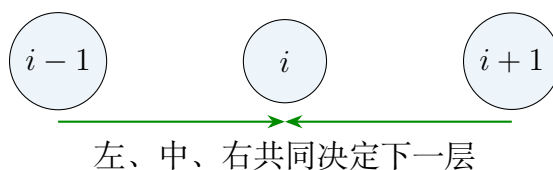


图23.1 显式差分格式中的相邻格点加权。

用热方程示例先学会“加权更新”

假设离散化后（为示范选取稳定的系数）某一步公式为

$$u_i^{new} = 0.2u_{i-1}^{old} + 0.6u_i^{old} + 0.2u_{i+1}^{old}.$$

如果旧网格的三个相邻值依次是 (3, 5, 9)，则

$$u_i^{new} = 0.2 \times 3 + 0.6 \times 5 + 0.2 \times 9 = 0.6 + 3 + 1.8 = 5.4.$$

先检查三系数之和 $0.2 + 0.6 + 0.2 = 1$ ，且均不为负，故新值 5.4 必须介于旧值 3 与 9 之间。

常见误算

这是一条**教学示范用热方程更新规则**，不是直接把任意 Black-Scholes PDE 的三个系数写成 0.2, 0.6, 0.2。实际 BSM 差分还包含漂移与贴现项，系数依赖网格和参数。

23.4 真的解一次三对角矩阵：从 PDE 回到普通线性方程

说明

隐式差分 and Crank-Nicolson 常把“下一层三个未知值”的关系写成一个**三对角线性系统**。你不必先学大型数值库，只需先会把三条联立方程一行一行消元。

三个未知数，完整消元

考虑示例系统

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

写成三条普通方程：

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0, \\ -x_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

从第三条开始： $2x_3 = x_2$ ，即 $x_3 = x_2/2$ 。代入第二条： $-x_1 + 2x_2 - x_2/2 = 0$ ，所以 $x_1 = 1.5x_2$ 。再代入第一条： $2(1.5x_2) - x_2 = 1$ ，得 $2x_2 = 1$ ，即 $x_2 = 0.5$ 。因此 $x_1 = 0.75, x_3 = 0.25$ 。

$$x = (0.75, 0.50, 0.25)^T.$$

结果核对

把求出的向量左乘矩阵：第一行 $2(0.75) - 0.50 = 1$ ；第二行 $-0.75 + 1 - 0.25 = 0$ ；第三行 $-0.50 + 2(0.25) = 0$ 。与右边 $(1, 0, 0)^T$ 完全一致。

23.5 模拟价格之前，先分清“路径值”和“价格估计”

假设一个模型可以产生贴现后的期权支付 $Y_1, \dots, Y_N$ 。其理论价格为 $E[Y]$ ，而实际程序只给出样本平均

$$\hat{C}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i.$$

即使模型完全正确， $\hat{C}_N$ 也会随随机数种子变化。若 Y_i 是独立同分布、方差有限的模拟支付，其标准误差是

$$SE(\hat{C}_N) = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{N}},$$

实际计算中用样本标准差 s 代替未知的 σ_Y 。

取八条已经贴现的支付 0, 4, 2, 8, 0, 6, 3, 5，则样本平均

$$\bar{Y} = \frac{28}{8} = 3.5.$$

围绕 3.5 的离差平方为 12.25, 0.25, 2.25, 20.25, 12.25, 6.25, 0.25, 2.25，相加为 56。样本方差按 $N - 1$ 计算：

$$s^2 = \frac{56}{7} = 8, \quad s = \sqrt{8} = 2.8284, \quad SE = \frac{2.8284}{\sqrt{8}} = 1.00.$$

若此处用正态近似构造置信区间，会得到 $3.5 \pm 1.96 \times 1.00 = [1.54, 5.46]$ 。不过只有八条路径，正态近似未必可靠；它在这里主要用来说明标准误差和置信区间的数量级，不能误以为它已经给出了高精度报价。

23.6 反变量的作用，不是“制造更多条独立路径”

在 GBM 精确模拟里，设 $T = 1, r = 2\%, q = 0, \sigma = 20\%, S_0 = K = 100$ 。风险中性终值是

$$S_T = 100 \exp \left[(0.02 - \frac{1}{2}0.2^2) + 0.2Z \right] = 100e^{0.2Z}.$$

取一对随机数 $Z = +1, -1$ ：

$$\begin{aligned} S_T(+1) &= 100e^{0.2} \approx 122.140, & (S_T - K)^+ &\approx 22.140, \\ S_T(-1) &= 100e^{-0.2} \approx 81.873, & (S_T - K)^+ &= 0. \end{aligned}$$

将这两个 payoff 配对平均并贴现：

$$\hat{C}_{pair} = e^{-0.02} \frac{22.140 + 0}{2} \approx 10.85.$$

这个例子只有一对路径，还远不足以形成可靠报价。反变量的目的不是把一对相关路径伪装成两条独立样本，而是让每一对的平均支付更稳定。方差改善来自正负随机冲击导致的负相关，是否有效取决于目标 payoff 的具体形式。

23.7 控制变量为什么允许减掉一个“已知均值的误差”

除了目标支付 Y ，若还模拟一个与它相关的变量 X ，且知道 $E[X] = m_X$ ，可构造

$$Y^* = Y - b(X - m_X).$$

只要 b 固定，便有 $E[Y^*] = E[Y]$ ，因为 $E[X - m_X] = 0$ 。计算方差：

$$\text{Var}(Y^*) = \text{Var}(Y) + b^2 \text{Var}(X) - 2b \text{Cov}(Y, X).$$

对 b 求导并令零，得到

$$b_{opt} = \frac{\text{Cov}(Y, X)}{\text{Var}(X)}.$$

例如样本里 $\bar{Y} = 5.4$, $\bar{X} = 102$ ，而理论上 $m_X = 100$ ，若取 $b = 0.08$ ，控制变量价格估计为

$$\hat{C}^* = 5.4 - 0.08(102 - 100) = 5.24.$$

这个 0.16 的修正不是凭空“把价格调小”；它利用了目标变量和控制变量的共同波动。实际实现时若用同一小样本估计 b ，可能引入有限样本偏差，严谨的生产代码需要处理系数估计和独立验证。

第 24 章

有限差分与 Longstaff–Schwartz

当没有闭式解时，我们把连续问题切成小格子

两种数值方法

有限差分以网格上的函数值近似偏导数，并将定价方程化为离散方程。最小二乘 Monte Carlo 则在模拟路径上回归继续持有价值，用于估计美式期权的行权决策。

为什么 LSM 只对价内路径做回归

如果 put 已经价外，立即执行价值为 0，是否执行根本不是问题。只有价内路径才需要比较“现在执行”与“继续等待”。因此 LSM 回归通常只使用价内路径。

24.1 显式差分的直观格式

两种数值方法

PDE 被离散化以后，会变成“下一个时间层的值 = 这一层左中右三个格点的加权平均”。

24.2 用 3 个空间点看懂显式差分

说明

连续 PDE 看起来像一堵墙，但有限差分只是把 S 轴切成网格。例如某一层只看 $S = 90, 100, 110$ 三个点，二阶导数可以用

$$V_{SS}(100) \approx \frac{V(110) - 2V(100) + V(90)}{10^2}$$

来近似。也就是说，Gamma 就是“中点和左右邻居弯曲程度”的离散版本。

变式

若三个点的期权价值分别是 3, 7, 13，则

$$V_{SS}(100) \approx \frac{13 - 2 \times 7 + 3}{100} = \frac{2}{100} = 0.02.$$

这和连续世界里的 Gamma 完全是同一个概念。

24.3 LSM 的一步例子

例题

美式看跌在某时刻 4 条路径的立即执行价值为 (7, 4, 0, 0)，对应未来贴现回报为 (6, 3, 1, 0)。实际做 LSM 需要大量路径来回归继续价值。假设已用更大的模拟样本和基函数 $(1, S, S^2)$ 估计完毕，模型对这里展示的两条价内路径预测继续价值分别为 (5, 4.5)。四条展示路径仅用于说明行权决策，不能独立稳定地估计三个回归系数。于是：

- 第一条路径：立即执行 $7 >$ 继续 5，执行；
- 第二条路径：立即执行 $4 <$ 继续 4.5，继续持有。

24.4 一张有限差分网格，看到偏微分方程怎样变成加减乘除

回到无股息、零利率的 Black-Scholes 方程，令 $\tau = T - t$ 表示距到期的时间，方程可写成

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}.$$

这是一个关于期权价值如何从到期往今天“反推”的方程。现在不求解析解，做一个很粗的小网格。取 $K = 100, \sigma = 20\%$ ，股价网格 $S = 80, 100, 120$ ，空间步长 $h = 20$ 。到期时看涨支付分别是

$$V(80, 0) = 0, \quad V(100, 0) = 0, \quad V(120, 0) = 20.$$

在中间股价点 $S = 100$ ，二阶导用三个点差分：

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \approx \frac{V(120) - 2V(100) + V(80)}{h^2} = \frac{20 - 0 + 0}{400} = 0.05.$$

方程右边的系数是 $\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 = \frac{1}{2}(0.2)^2(100)^2 = 200$ ，因此

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} \approx 200 \times 0.05 = 10.$$

若先往前推进 $\Delta\tau = 0.05$ 年，并用显式 Euler：

$$V(100, 0.05) \approx V(100, 0) + 10 \times 0.05 = 0.50.$$

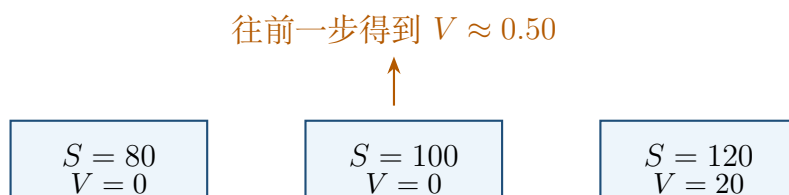


图 24.1: 二阶差分只需要一个左邻点、中心点和右邻点。

这个算例的目的只是展示计算机制，不应把 0.50 当作精确期权报价。网格只有 20 元一格，距离真实到期支付函数的折点非常粗；短期平值看涨的解析价格大约为 1.78。要获得可靠数值，必须细化股价网格和时间步长，并处理边界条件及差分格式的稳定性。

24.5 Monte Carlo 置信区间：保留分母中的 $n - 1$

有八条已经贴现的模拟 payoff: 0, 4, 2, 8, 0, 6, 3, 5。它们的均值是

$$\bar{X} = \frac{0 + 4 + 2 + 8 + 0 + 6 + 3 + 5}{8} = 3.5.$$

把八个观察值与均值相减再平方：

$$12.25, \quad 0.25, \quad 2.25, \quad 20.25, \quad 12.25, \quad 6.25, \quad 0.25, \quad 2.25.$$

平方和为 56，样本方差为 $s^2 = 56/(8 - 1) = 8$ ，样本标准差 $s = \sqrt{8} = 2.8284$ ，均值的标准误差为

$$SE = \frac{s}{\sqrt{8}} = 1.$$

如果仅作正态近似，95% 区间为 3.5 ± 1.96 ，即 $[1.54, 5.46]$ 。需要注意：这里只有八条路径，正态近似的精度并不可靠。较大样本时该写法才更适合直接作为报价误差的参考。

24.6 模拟的单位：把波动率变成每一步的随机冲击

GBM 离散模拟经常用到

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp \left[\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z \right].$$

取 $S_t = 100, r = 4\%, q = 0, \sigma = 20\%, \Delta t = 1/12$ ，本次抽到 $Z = 0.5$ 。先逐项列出来：

$$\text{漂移} = (0.04 - 0.02)/12 \approx 0.0016667,$$

$$\sqrt{\Delta t} = \sqrt{1/12} \approx 0.288675,$$

$$\text{随机冲击} = 0.20 \times 0.288675 \times 0.5 \approx 0.028868,$$

$$\text{总指数} \approx 0.0016667 + 0.028868 = 0.030535.$$

因此这一步模拟出来的股价约为 $100e^{0.030535} \approx 103.10$ 。这条路径上的上涨并不意味着未来一个月的预期收益就是 3.10%；它包含了本次随机抽样产生的噪声。

24.7 有限差分的网格为何能代替偏微分方程

金融数学里的偏微分方程经常写成 $V_t + \mathcal{L}V = 0$ ，其中 $\mathcal{L}$ 表示股票价格方向上的一阶、二阶导数及贴现项。计算机并不知道“连续的曲线”是什么，它只会存储有限个价格节点上的 V 值。因此需要把微分算子换成相邻格点之间的差。

在均匀的股票价格网格上，间距为 h ，把一个节点记作 S_i 。向右、向左走一格的价格分别为 $S_i + h$ 和 $S_i - h$ 。Taylor 展开给出

$$V(S_i + h) = V_i + hV_S + \frac{1}{2}h^2V_{SS} + O(h^3),$$

$$V(S_i - h) = V_i - hV_S + \frac{1}{2}h^2V_{SS} + O(h^3).$$

两式相减，二阶项抵消：

$$V_S \approx \frac{V_{i+1} - V_{i-1}}{2h}.$$

两式相加并减去 $2V_i$ ，一阶项抵消：

$$V_{SS} \approx \frac{V_{i+1} - 2V_i + V_{i-1}}{h^2}.$$

这便是中心差分公式的来源。它们并非孤立的计算口诀，而是同一个 Taylor 展开沿左右两个方向组合的结果。

左右格点共同决定局部斜率和曲率

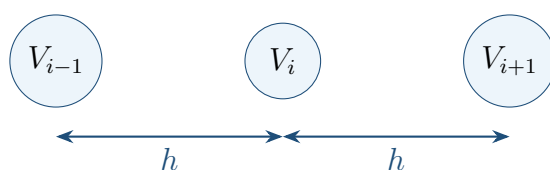


图24.2 中心差分的一阶斜率与二阶曲率近似。

24.8 一个隐式格式为什么会产生三对角线性系统

为了看清计算结构，先用比 Black-Scholes 更简单的热方程

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

作演示。令 $\lambda = \kappa \Delta \tau / h^2$ 。隐式时间离散把新的时刻 $n+1$ 放入空间差分：

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta \tau} = \kappa \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{h^2}.$$

移项得到

$$-\lambda u_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\lambda)u_i^{n+1} - \lambda u_{i+1}^{n+1} = u_i^n.$$

每一行只涉及新时间层的左、中、右三个格点，所以形成三对角矩阵。这里以热方程为例，是因为 Black-Scholes PDE 在经过变量变换后可以化为热方程形式；实际期权边界条件、坐标变换与系数还需要分别处理。

三个未知网格点：真的把线性方程组解出来

假设 $\lambda = 0.25$ ，两端边界新值都为 0，三个内部格点的旧值为 $(0, 1, 0)^T$ 。新值 $(x_1, x_2, x_3)^T$ 应满足

$$\begin{pmatrix} 1.5 & -0.25 & 0 \\ -0.25 & 1.5 & -0.25 \\ 0 & -0.25 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

第一行给 $x_1 = x_2/6$ ，第三行给 $x_3 = x_2/6$ 。代回中间一行：

$$-\frac{x_2}{24} + 1.5x_2 - \frac{x_2}{24} = 1 \implies \frac{17}{12}x_2 = 1.$$

所以 $x_2 = 12/17 \approx 0.705882$ ，而 $x_1 = x_3 = 2/17 \approx 0.117647$ 。核验第二行：
 $-0.25(2/17) + 1.5(12/17) - 0.25(2/17) = 1$ 。

24.9 LSM 为什么是一道回归题，而不只是一道平均题

对于美式期权，某一时点的继续持有价值是已知当前状态后，未来现金流贴现值的条件期望。Monte Carlo 模拟可以给出未来收益样本，但无法直接在同一个当前股价上生成无限多条未来路径。Longstaff-Schwartz 方法用回归函数去估计该条件期望。

考虑某个时刻的四条价内看跌期权路径。它们的股票价格为 (80, 85, 90, 95)；下一期收到的折现后现金流为 (16, 15, 12, 6)。我们暂时只采用线性函数 $a + bS$ 拟合继续价值。

先算样本均值： $\bar{S} = 87.5$ ， $\bar{Y} = (16 + 15 + 12 + 6)/4 = 12.25$ 。回归斜率为

$$\begin{aligned} b &= \frac{\sum (S_i - 87.5)(Y_i - 12.25)}{\sum (S_i - 87.5)^2} \\ &= \frac{-82.5}{125} = -0.66. \end{aligned}$$

截距 $a = \bar{Y} - b\bar{S} = 12.25 + 57.75 = 70$ ，拟合的继续价值是 $\hat{C}(S) = 70 - 0.66S$ 。

S	立即执行 $100 - S$	继续价值 $70 - 0.66S$	较大者	决定
80	20	17.2	20	执行
85	15	13.9	15	执行
90	10	10.6	10.6	继续
95	5	7.3	7.3	继续

这张表只为解释回归和决策的联系。真实定价还要使用足够多的模拟路径、合理的基函数与贴现方法，并且逐时刻向后处理行权决策。很少的路径可以用于展示运算，却不足以声称回归估计稳定。

24.10 隐式差分为何必须解一个线性方程组

显式差分通常直接利用已知时间层的数值计算下一层；隐式差分则让未知层格点同时出现在多个方程中。看上去更麻烦，却能改善许多扩散问题的数值稳定性。下面完全不用复杂的偏微分算子记号，先做一个三格点例子。

假设某一时间步隐式离散后，三个未知格点价值 x_1, x_2, x_3 满足

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

把矩阵乘法翻译成普通方程：

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0, \\ -x_2 + 2x_3 &= 1. \end{aligned}$$

第一式得 $x_2 = 2x_1 - 1$ ；第三式得 $x_3 = (1 + x_2)/2 = x_1$ 。将两个关系代入第二式：

$$-x_1 + 2(2x_1 - 1) - x_1 = 0 \Rightarrow 2x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = 1.$$

所以 $x_2 = 1, x_3 = 1$ 。将三个值放回方程：

$$2 - 1 = 1, \quad -1 + 2 - 1 = 0, \quad -1 + 2 = 1.$$

这三个等式全部成立，便完成了本次线性求解的残差检查。对真实期权定价，边界条件通常会进入右侧向量，矩阵系数也会随时间步长、股价格点、利率和波动率变化。这个小例子只说明隐式网格如何变成联立方程，并不声称这个特定矩阵就是某一个期权的完整 Black-Scholes 离散形式。

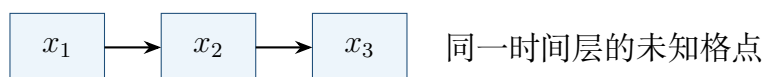


图 24.3: 隐式算法需要同时求解多个格点，邻近格点的耦合产生三对角矩阵。

24.11 算法精度和统计误差必须分开

蒙特卡洛的误差主要含有样本数有限造成的随机误差；时间、空间网格离散还会产生偏差。以模拟 SDE 为例，独立路径数翻四倍，一般能将标准误差约减半，却不会自动消除时间步长带来的离散化偏差。有限差分方法同样需要检验时间网格和空间网格是否充分细密。

实务中通常采用网格加密测试：先算 h 网格得到 V_h ，再用 $h/2$ 得 $V_{h/2}$ ，比较两者差值。仅当结果随加密逐渐稳定，才有理由认为离散化误差正在减小。它是数值收敛的经验诊断，并不是无条件的精确误差上界。

Zoey Lin

数值方法需要报告怎样的误差

设已模拟出八条独立路径，它们的贴现终值依次为 0, 4, 2, 8, 0, 6, 3, 5。Monte Carlo 价格估计就是八条路径的算术平均，

$$\bar{Y} = \frac{0 + 4 + 2 + 8 + 0 + 6 + 3 + 5}{8} = 3.5.$$

逐个求离差平方，得到 12.25, 0.25, 2.25, 20.25, 12.25, 6.25, 0.25, 2.25，总和为 56。样本方差 $s^2 = 56/(8-1) = 8$ ，所以

$$s = \sqrt{8} = 2.828427, \quad \widehat{\text{SE}}(\bar{Y}) = \frac{s}{\sqrt{8}} = 1.$$

单条路径的标准差刻画支付的离散性，标准误刻画样本均值的估计精度。若独立样本数扩大为原来的四倍，在方差近似不变时，标准误才会减半。模拟不确定性没有因模型写得精致而自动消失。

控制变量的系数如何求出

设目标为估计 $E[Y]$ ，同时能算出一个与 Y 高度相关的变量 X 的真实期望 μ_X 。构造

$$Y^*(\beta) = Y - \beta(X - \mu_X).$$

展开方差，

$$\text{Var}(Y^*) = \text{Var}(Y) + \beta^2 \text{Var}(X) - 2\beta \text{Cov}(Y, X).$$

令其对 β 的导数为零，得到最优系数

$$\beta^* = \frac{\text{Cov}(Y, X)}{\text{Var}(X)}.$$

若 $\text{Var}(Y) = 9$, $\text{Var}(X) = 4$, $\text{Cov}(Y, X) = 3$ ，则 $\beta^* = 3/4$ 。替换后方差为 $9 + (9/16)(4) - 2(3/4)(3) = 6.75$ ，比原方差 9 下降 25%。这一结论要求用的是正确的 μ_X ；若未知期望也靠同一批数据猜测，不能直接宣称无偏。

隐式差分中的三对角矩阵

对 $u_t = \kappa u_{xx}$ ，设 $\lambda = \kappa \Delta t / h^2$ ，向后时间差分与中心空间差分给出

$$-\lambda u_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\lambda)u_i^{n+1} - \lambda u_{i+1}^{n+1} = u_i^n.$$

令网格内部有三个未知点，取 $\lambda = 0.2$ 且边界为零，则线性系统是

$$\begin{pmatrix} 1.4 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & 1.4 & -0.2 \\ 0 & -0.2 & 1.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

从第一式得到 $u_1^{n+1} = (2 + 0.2u_2^{n+1})/1.4$ ，从第三式得到 $u_3^{n+1} = (8 + 0.2u_2^{n+1})/1.4$ 。代入中间一式后只有一个未知数，求出后再回代两边。这就是三对角消元的最小模型。真实期权 PDE 还需要处理贴现、漂移和终端支付，不能把热方程的格点直接视为期权定价的全部条件。

专题 H

数值方法：模拟、误差与离散方程

实际工作里，往往已经知道模型，却算不出一个漂亮的闭式解。数值方法并不是另一门完全不同的学问：它始终在平衡三件事——离散化误差、统计误差和计算成本。

H.1 八条 Monte Carlo 路径，统计量逐个算

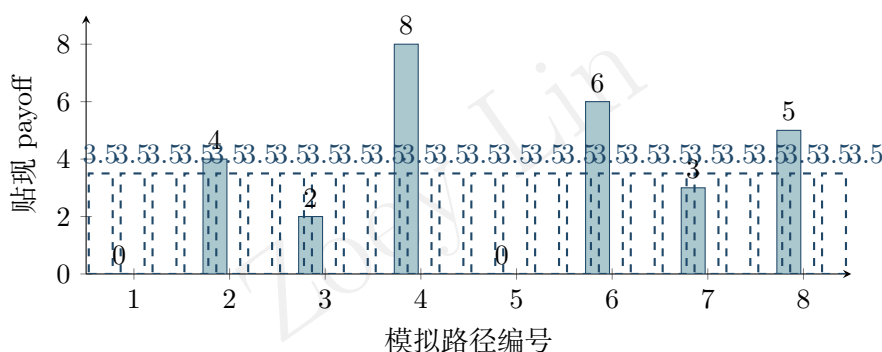
假定八条模拟路径产生的已经贴现的 *payoff* 为 0, 4, 2, 8, 0, 6, 3, 5。样本均值

$$\bar{X} = (0 + 4 + 2 + 8 + 0 + 6 + 3 + 5)/8 = 28/8 = 3.5.$$

每项与均值之差的平方是

$$12.25, 0.25, 2.25, 20.25, 12.25, 6.25, 0.25, 2.25,$$

平方和 56。样本方差 $s^2 = 56/(8-1) = 8$ ，样本标准差 $s = \sqrt{8} = 2.8284$ ，均值标准误 $SE = s/\sqrt{8} = 1$ 。近似 95% 置信区间为 $3.5 \pm 1.96 = [1.54, 5.46]$ 。



H.2 为什么路径数增加 4 倍，误差才约减半

若路径独立同分布并具有有限方差，样本均值的理论标准差是 $\sigma/\sqrt{N}$ 。所以

$$\frac{SE(4N)}{SE(N)} = \frac{\sigma/\sqrt{4N}}{\sigma/\sqrt{N}} = \frac{1}{2}.$$

统计误差消失得比较慢。这一点直接决定了计算预算，也解释了为什么反变量和控制变量可能比单纯增加模拟次数更有效。

H.3 控制变量的原理来自普通方差最小化

假设想估计 $E[Y]$ ，另有控制变量 X 的精确均值 $E[X]$ 。构造

$$Y^* = Y - \beta(X - E[X]).$$

它的期望始终是 $E[Y]$ 。而方差为

$$\text{Var}(Y^*) = \text{Var}(Y) + \beta^2 \text{Var}(X) - 2\beta \text{Cov}(X, Y).$$

对 β 求导并设为零，得 $\beta^* = \text{Cov}(X, Y)/\text{Var}(X)$ 。若 $\text{Corr}(X, Y) = \rho$ ，代入后最小方差为

$$\text{Var}(Y)(1 - \rho^2).$$

所以控制变量有多大帮助，取决于我们能找到多相关的、期望已知的辅助变量。

H.4 有限差分的离散化原理

考虑热方程 $u_t = au_{xx}$ ，在空间网格 $x_i = i\Delta x$ 和时间网格 $t_n = n\Delta t$ 上，用显式差分：

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = a \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}.$$

设 $\lambda = a\Delta t/(\Delta x)^2$ ，移项得

$$u_i^{n+1} = \lambda u_{i-1}^n + (1 - 2\lambda)u_i^n + \lambda u_{i+1}^n.$$

例如 $\lambda = 0.2$ ，原先左中右三点的值分别是 2, 5, 8，则下一时刻中点

$$0.2 \times 2 + 0.6 \times 5 + 0.2 \times 8 = 0.4 + 3.0 + 1.6 = 5.0.$$

当 $0 \leq \lambda \leq 1/2$ 时，上式可看成非负权重的平均；显式热方程在这种条件下具有熟悉的稳定性直觉。

H.5 隐式差分为什么会出现三对角矩阵

把上式空间导数放到 $n+1$ 时刻：

$$-\lambda u_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\lambda)u_i^{n+1} - \lambda u_{i+1}^{n+1} = u_i^n.$$

若有三个待求的内部格点、边界为零、 $\lambda = 0.25$ ，则

$$\begin{pmatrix} 1.5 & -0.25 & 0 \\ -0.25 & 1.5 & -0.25 \\ 0 & -0.25 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

这不再是分别更新三个格点，而是一次解三个相互联系的线性方程。矩阵里只有主对角线和两条邻对角线非零，因而可用 Thomas 算法高效求解。

一组数值方法之间的联系。 Monte Carlo 近似的是期望，有限差分近似的是偏微分方程。Feynman-Kac 说明在合适条件下它们描述的是同一个价格；因此同一道期权题可用两套独立数值算法相互检查。

8 数值定价中的误差从哪里来

8.1 Monte Carlo 样本均值的波动

考虑八条已经贴现的期权支付，数值依次为 0, 4, 2, 8, 0, 6, 3, 5。它们的均值为 $28/8 = 3.5$ 。为了估计均值的抽样误差，先计算相对均值的平方离差，

$$12.25, \quad 0.25, \quad 2.25, \quad 20.25, \quad 12.25, \quad 6.25, \quad 0.25, \quad 2.25.$$

平方离差和为 56，无偏样本方差为 $s^2 = 56/7 = 8$ ，标准差 $s = 2.828427$ 。均值的估计标准误差为

$$SE = \frac{s}{\sqrt{8}} = 1.$$

若样本量足够且正态近似适用，可以构造近似区间 $3.5 \pm 1.96SE = [1.54, 5.46]$ 。八条路径非常少；这个区间只是演示标准误的计算过程，不能视作一个精密的定价置信区间。

8.2 为什么多一倍路径不会多一倍精度

假设每条独立路径的方差为 τ^2 ， N 条路径平均值的方差为 τ^2/N ，于是标准误差是 $\tau/\sqrt{N}$ 。当 N 从 10^4 增加到 4×10^4 时，标准误差正好减半；若想降低到十分之一，需要约百倍的独立路径。

8.3 用一个三点网格看懂二阶差分

对网格 $S = 80, 100, 120$ ，令 $h = 20$ 。到期看涨期权执行价 $K = 100$ ，三个支付分别为 0, 0, 20。二阶导数用中心差分近似，

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(100) \approx \frac{V(120) - 2V(100) + V(80)}{h^2} = \frac{20 - 0 + 0}{400} = 0.05.$$

一阶导数的中心差分约为 $(20 - 0)/40 = 0.5$ 。它们分别近似 Gamma 与 Delta，但在到期收益的折点附近，光滑性不足，不能把粗网格近似误认为解析 Greek。

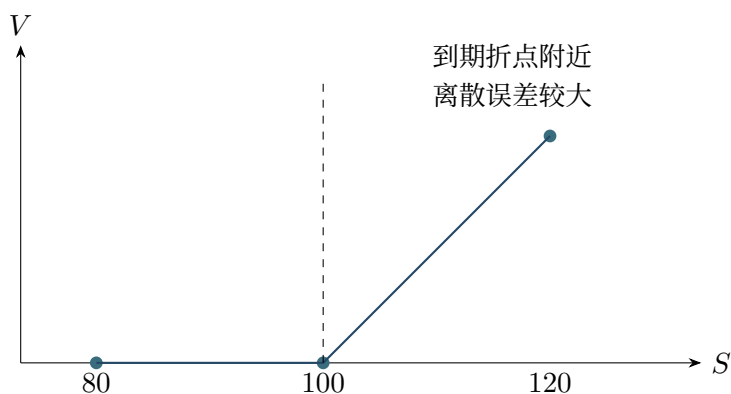


图 8.1: 中心差分以邻近网格点的函数值推算局部斜率与曲率。

8.4 控制变量的修正项怎样得到

设欲估计的贴现支付为 Y 。找到一个与它高度相关、且期望已知的变量 X 。构造

$$\hat{\mu}_Y^{CV} = \bar{Y} - \beta(\bar{X} - E[X]).$$

例如 $\bar{Y} = 5.40$ 、 $\bar{X} = 102$ 、 $E[X] = 100$ 、 $\beta = 0.08$ ，则

$$\hat{\mu}_Y^{CV} = 5.40 - 0.08(102 - 100) = 5.24.$$

之所以可以减去修正项，是因为 $E[\bar{X} - E[X]] = 0$ 。在 β 固定时，估计量仍无偏。通过最小化方差可求得理论最优系数 $\beta^* = \text{Cov}(Y, X) / \text{Var}(X)$ 。在实际计算中，这个系数通常需要从模拟样本估计，精度也受到样本误差影响。

8.5 以四条路径演示 Longstaff-Schwartz 回归

考虑一个较早时刻的美式看跌期权，执行价为 100。为了说明继续价值回归，假设已有更长的模拟路径及后续最优行权决策，选出四条在价内的路径。当前股价分别为 80, 85, 90, 95，对应的未来折现到当前的现金流分别是 19, 16, 9, 7。

采用最简单的线性回归 $\hat{C}(S) = a + bS$ 。四个股价的平均值为 $\bar{S} = 87.5$ ，现金流平均值为 $\bar{Y} = 12.75$ 。计算离差乘积和，

$$\sum_i (S_i - 87.5)(Y_i - 12.75) = -107.5.$$

股价离差平方和为

$$\sum_i (S_i - 87.5)^2 = (-7.5)^2 + (-2.5)^2 + 2.5^2 + 7.5^2 = 125.$$

所以斜率 $b = -107.5/125 = -0.86$ ，截距 $a = 12.75 - (-0.86)(87.5) = 88$ 。估计继续价值为

$$\hat{C}(S) = 88 - 0.86S.$$

按股价 80, 85, 90, 95 的顺序，四个预测值分别是 19.20, 14.90, 10.60, 6.30。立即执行价值分别是 20, 15, 10, 5。比较后，前两条路径选择执行，后两条路径倾向继续。

四条路径只够解释这一步的最小二乘代数，实际建模需要多得多的路径，回归的基函数与抽样误差也会影响策略稳定性。上述现金流已被假设为折现到同一时点，若忽略贴现还原，比较就会失去共同单位。

有限差分、回归和模拟误差

用三点网格解释显式热方程格式。对 $u_t = \kappa u_{xx}$ ，时间步长 Δt 、空间步长 h ，记 $\lambda = \kappa \Delta t / h^2$ 。中心差分得

$$u_i^{n+1} = \lambda u_{i-1}^n + (1 - 2\lambda)u_i^n + \lambda u_{i+1}^n.$$

当 $\lambda = 0.2$ ，左、中、右三个旧值为 2, 5, 8，新值为 $0.2(2) + 0.6(5) + 0.2(8) = 5$ 。若 $0 \leq \lambda \leq 0.5$ ，三个权重均非负且总和为 1，这为热方程显式差分的稳定性提供初步直觉。

三对角系统从何而来

将空间二阶差分放在新时间层，会出现

$$-\lambda u_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\lambda)u_i^{n+1} - \lambda u_{i+1}^{n+1} = u_i^n.$$

三个相邻未知数构成一条线性方程，因此所有网格点一起组成三对角线性系统。可以用 Thomas 消元算法求解。数值实现时，边界条件必须和离散方程同步确定。

模拟误差与模型误差要分别报告

假设八个独立贴现支付是 (0, 4, 2, 8, 0, 6, 3, 5)，均值为 3.5，样本方差 $s^2 = 8$ 。均值标准误为 $s/\sqrt{8} = 1$ 。若采用正态近似，区间为 3.5 ± 1.96 。八条路径很少，这一结果只能用来说明标准误的计算，不能作为有把握的真实市场报价。

LSM 回归的样本数

对于美式期权，Longstaff-Schwartz 方法用路径上的未来折现现金流回归当前状态，以预测继续持有价值。若用常数、一阶和二阶三种基函数，至少需要足够多的互不退化的价内样本来识别三个系数。四条路径只能展示矩阵代数，实际计算应使用大量路径并检查回归稳定性。预测继续价值和立即执行价值后，才可以比较行权选择。

控制变量降低的是蒙特卡洛统计方差，细网格降低的是离散化偏差。两者可以相互配合，但都不能修复错误的市场模型或错误的参数口径。

第九部分

风险管理与综合案例

Zoey Lin

第 25 章

VaR、ES 与 GARCH

VaR 是阈值，ES 是越过阈值以后平均多惨

损失尾部的描述

给定模型和置信水平后，VaR 给出损失分布的相应分位数。ES 进一步描述该分位数之外的尾部损失。估计这两个量时，应说明损失符号、样本区间和所采用的分位数规则。

VaR 的方向感

若组合 1000 万，日波动率 1%，95% 正态 VaR 约为

$$1000\text{万} \times 1.645 \times 1\% = 16.45\text{万}.$$

如果波动率翻倍到 2%，其他不变，VaR 也大致翻倍到 32.9 万。

GARCH 为什么有“记忆”

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha \varepsilon_t^2 + \beta \sigma_t^2.$$

今天发生大冲击， ε_t^2 变大，明天方差被抬高；之后即使没有新冲击， $\beta \sigma_t^2$ 仍把高波动的一部分带到后面几天，所以波动会慢慢衰减，而不是马上恢复。

25.1 Parametric VaR

例题

组合价值 1000 万，日均值近似 0，日波动率 1.5%。95% 左尾 $z = -1.645$ ，则

$$\text{VaR}_{95\%} = 1000\text{万} \times 1.645 \times 1.5\% = 246750.$$

即一天 95% VaR 约为 24.675 万。

25.2 Expected Shortfall

考虑某一置信水平下已确定属于尾部的五个损失观测，单位为万元，分别为 30, 22, 18, 15, 10。它们的平均损失是

$$\bar{L}_{\text{tail}} = \frac{30 + 22 + 18 + 15 + 10}{5} = 19 \text{ 万元}.$$

只有在事先说明尾部选取规则、且这些观测确实代表目标尾部时，才可把这个样本平均用于估计对应水平的 ES。

25.3 GARCH(1,1) 的连续递推

设条件方差模型为

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha \varepsilon_t^2 + \beta \sigma_t^2.$$

取 $\omega = 0.000002, \alpha = 0.08, \beta = 0.90$ ，初始方差 $\sigma_0^2 = 0.0001$ ，当天冲击为 $\varepsilon_0 = -0.02$ 。第一天的新方差为

$$\sigma_1^2 = 0.000002 + 0.08(0.0004) + 0.90(0.0001) = 0.000124.$$

若以后四天的冲击都为零，按模型逐日递推可得 $\sigma_2^2 = 0.0001136, \sigma_3^2 = 0.00010424, \sigma_4^2 = 0.000095816, \sigma_5^2 = 0.000088234$ 。这里只为展示冲击如何衰减；实际回测时应使用当天观测到的残差。

25.4 历史 VaR 与正态参数 VaR

设十个日收益按从小到大排列，单位为百分数：

$$-2.0, -1.2, -0.8, -0.3, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.9, 1.1.$$

求得均值 $\bar{r} = -0.1\%$ ，无偏样本标准差 $s = 0.9809293\%$ 。对于 1000 万元持仓，90% 历史 VaR 的计算先取决于所采用的经验分位数定义：

- **最近秩分位数**先按损失从小到大排序，取第 9 个值 1.2%，对应 VaR 为 12 万元；
- **线性插值 (Type 7)** 取 -1.28% ，对应 VaR 为 12.8 万元。

若另外假设日收益服从正态分布，并直接估计均值和样本标准差，取 $z_{0.1} = -1.281552$ ，则

$$q_{0.1} = -0.1\% - 1.281552(0.9809293\%) = -1.35711\%,$$

$$\text{VaR}_{90\%}^{\text{normal}} \approx 135711 \text{ 元}.$$

十日样本的经验分位数很不稳定。三种算法有不同前提，报告结果时须列明样本量、估计方法与置信水平。

25.5 历史情景排序与 VaR 分位数

分位数与样本量

VaR 对应某个置信水平下的损失门槛，ES 关注更严重损失的平均水平。在小样本下，经验分位数常因排序或插值方法而变化。报告结果时应注明定义和有效样本量。

10 个情景的明确离散定义

假设 10 个历史日损失（单位：万元）由大到小排为

$$30, 22, 18, 15, 10, 7, 3, 0, -2, -4.$$

这里损失为正数，收益为负数。若教学上采用“最差 10%”即最差一个样本作为尾部，最差日损失就是 30 万，尾部均值 ES 也是 30 万。如果采用最差 20%（两个样本）作为尾部，则尾部损失均值

$$ES_{80\%} = \frac{30 + 22}{2} = 26 \text{ 万元}.$$

由此先看到一个事实：尾部比例改变，ES 会改变；对于 10 个样本，换一个样本即可造成很大差异。实践中需要更多数据和清晰的分位数定义。

常见误算

不能把 10 个数据的最差一个当成“精确估出来的 99% VaR”：其分辨率只有 10%，离 1% 尾部仍很远。小样本的 99% 风险需要更长样本或明确的模型假设。

25.6 VaR 与 ES 用同一批损失数据读出不同的信息

设风险损失 L 用正数表示亏损，负数表示盈利。95% 的 VaR 是一个损失门槛：有至少约 95% 的概率，损失不超过它。在连续分布中，常记作

$$\text{VaR}_{0.95}(L) = \inf\{\ell : P(L \leq \ell) \geq 0.95\}.$$

它并不告诉我们超过门槛以后究竟会亏多少。ES (Expected Shortfall) 则关注尾部的平均损失。对连续分布、在合适正则条件下，95% ES 可以写为超出 95% VaR 阈值后的条件平均损失。

一组明确的历史情景

假设有 100 个等概率的历史损失情景，按从小到大排列，前 95 个损失均不超过 10 万元，而且第 95 个刚好是 10 万元；最后 5 个损失为

$$12, 15, 20, 25, 28 \text{ 万元.}$$

按照“95% 经验分位数取第 95 个排序值”的约定，

$$\text{VaR}_{95\%} = 10 \text{ 万元.}$$

对应最坏 5% 的情景平均损失为

$$\text{ES}_{95\%} = \frac{12 + 15 + 20 + 25 + 28}{5} = 20 \text{ 万元.}$$

这里要把历史方法中的分位数约定写清楚：样本较少时，不同软件可能采用不同的插值方式；若某个阈值处有大量相同观测，ES 的尾部权重也需要相应处理。不要把两个程序的小样本结果略有差异直接归因于算法错误。

25.7 正态 VaR 从左尾标准化得到

若资产组合的一日收益率满足近似正态分布 $R \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，组合市值为 V ，一日损失 $L = -VR$ 。则 L 的均值是 $-V\mu$ ，标准差是 $V\sigma$ 。95% VaR 为

$$\text{VaR}_{95\%}(L) = -V\mu + 1.644854V\sigma.$$

例如 $V = 1000$ 万元、 $\mu = 0$ 、 $\sigma = 1.5\%$ ，则

$$\text{VaR}_{95\%} \approx 1000 \text{ 万} \times 1.644854 \times 0.015 \approx 24.67 \text{ 万元.}$$

从量纲可立刻检查： $V\sigma$ 本身是 15 万元乘上一个无量纲分位系数，应当得到几十万元的损失门槛，而不是几十元或几千万元。

25.8 GARCH 方程里的三项分别在做什么

条件方差常见的 GARCH(1,1) 写法为

$$h_{t+1} = \omega + \alpha \varepsilon_t^2 + \beta h_t,$$

其中 $h_t = \sigma_t^2$ 是方差而不是标准差。 ω 提供基础项， $\alpha \varepsilon_t^2$ 反映最新冲击大小， βh_t 保留过去条件波动的记忆。

若 $\omega = 0.000002$, $\alpha = 0.08$, $\beta = 0.90$ ，初始条件方差 $h_0 = 0.0001$ ，新冲击 $\varepsilon_0 = -0.02$ ，则

$$h_1 = 0.000002 + 0.08 \times 0.0004 + 0.90 \times 0.0001 = 0.000124.$$

第二天条件波动率因此是 $\sqrt{0.000124} \approx 1.1136\%$ 。若随后各期新冲击恰好为零，下一期方差成为 $h_2 = 0.000002 + 0.90 \times 0.000124 = 0.0001136$ ，继续逐期递减。这并不意味着方差会趋于零；在冲击长期恒为零的特殊路径中，它趋向 $\omega/(1 - \beta) = 0.00002$ ，而在通常随机冲击下、满足条件时的无条件方差是 $\omega/(1 - \alpha - \beta) = 0.0001$ 。这两个极限的差别来自是否还不断产生新的随机冲击。

25.9 同一个损失分布，VaR 和 ES 回答的是两个问题

约定损失 L 为正数。置信水平 α 的 VaR 是损失的 α 分位点：

$$\text{VaR}_\alpha(L) = \inf\{\ell : \mathbb{P}(L \leq \ell) \geq \alpha\}.$$

对于连续分布，Expected Shortfall 可以理解为超过该分位点后的平均损失；严格地说，当损失分布在 VaR 处有大量相同取值时，还须按照尾部分位数定义处理边界质量，不能简单地“取所有大于 VaR 的样本平均”。

假设组合价值 $V = 1000$ 万，日收益服从均值近似零、波动率 $\sigma = 1.5\%$ 的正态模型。一天 95% VaR 为

$$V \times \sigma \times z_{0.95} = 10,000,000 \times 0.015 \times 1.64485 \approx 246,728 \text{ 元}.$$

这告诉我们，在模型假设成立时，有约 5% 的可能出现比这个阈值更大的损失。要算正态模型的 ES，可以使用

$$ES_\alpha = V\sigma \frac{\varphi(z_\alpha)}{1 - \alpha} \quad (\text{均值取零}).$$

标准正态密度在 $z_{0.95} \approx 1.64485$ 处约为 0.1031，于是

$$ES_{0.95} \approx 10,000,000 \times 0.015 \times \frac{0.1031}{0.05} \approx 309,300 \text{ 元}.$$

比较可以看到：VaR 约 24.67 万，而 ES 约 30.93 万。后者问的是真正进入最差 5% 情形之后，平均会损失多少，因此通常比对应的 VaR 更大。

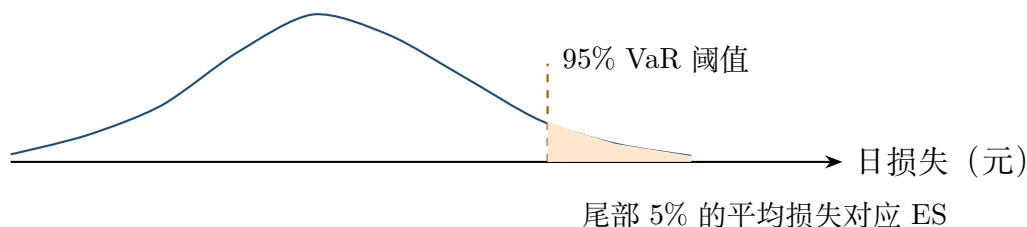


图25.1 损失分布尾部的 VaR 与 ES 示意。

单纯使用正态模型往往会低估厚尾、跳空和流动性危机下的尾部损失。即使价格模型估值准确，风险管理仍需独立考虑压力情景、估计误差和头寸无法及时平仓等现实限制。

第 26 章

综合案例一：从期权报价到价格、Greeks、对冲与复核

综合题先不要一上来全算

计算次序

综合定价通常先明确市场输入、计息约定和合约乘数，再计算贴现因子、模型价格及各项敏感度。中间量保留足够精度，可以减少后续情景损益计算中的舍入误差。

标准工作流

1. 检查 S, K, T, r, q 口径；
2. 反解 IV；
3. 共享 $d_1, d_2, \phi(d_1)$ 算 Greeks；
4. 根据持仓方向翻转 Greeks 符号；
5. 用 Taylor 做快速情景；
6. 用 full revaluation 做第二次复核；
7. 最后用套利边界和 parity 做第三层检查。

案例推演

市场: $S = 100, K = 105, T = 0.5, r = 4\%, q = 1\%$, call 市价 5.55。

1. 先用 BSM 八盒法反解 IV, 得到约 25%;
2. 计算 $\Delta \approx 0.457, \Gamma \approx 0.0223, \nu \approx 27$;
3. 若空 100 份 call, 为 Delta 中性需买 45.7 股;
4. 做情景分析: 若 S 上涨 2 元且 IV 上升 1 个点, 期权单份近似变动

$$\Delta V \approx \Delta \times 2 + \frac{1}{2}\Gamma \times 2^2 + \nu \times 0.01.$$

代入得到

$$0.457 \times 2 + 0.5 \times 0.0223 \times 4 + 27 \times 0.01 \approx 1.23.$$

5. 再做 full revaluation 与 parity 复核。

Zoey Lin

第 27 章

综合案例二：固定收益交易台的一整条 workflow

固定收益计算的主线是“曲线先行”

贴现曲线的用途

贴现曲线给出了不同到期日一元确定支付的现值。逐期使用相应贴现因子，可对债券、利率互换和远期利率协议的现金流统一估值。到期收益率可由价格反算，作为另一种报价方式。

workflow 拆成 5 层

- 第 1 层：报价 → 贴现因子；
- 第 2 层：贴现因子 → 产品 PV；
- 第 3 层：平移/桶状冲击 → DV01/KRD；
- 第 4 层：线性系统 → 对冲仓位；
- 第 5 层：重定价 → 检查近似误差。

案例推演

目标：从报价得到曲线，再给债券和互换定价，再做风险。

1. 用存款、FRA、Swap bootstrap 出 $D(0, t)$;
2. 用 $D(0, t)$ 定价债券和互换;
3. 计算 Duration、DV01、KRD;
4. 用线性方程组做 KRD 对冲;
5. 再用重定价复核风险近似是否可信。

例如某组合 DV01 为 820，若候选对冲工具 A、B 的每万元 DV01 分别为 6 和 10，则满足一阶中性至少需要求解

$$6x + 10y = 820.$$

若再要求凸性中性，则再加一条方程，变成 2 个未知数的线性系统。

Zoey Lin

第 28 章

综合案例三：组合风险从样本到风险贡献

组合风险不是把单个波动率加起来

组合风险的来源

组合收益的方差同时取决于各资产的单独波动和两两协同。以协方差矩阵记录这些关系，再通过资产权重进行二次型运算，即可求得组合总体方差及相关风险贡献。

风险贡献为什么能加回总风险

组合波动率 $\sigma_p = \sqrt{w^T \Sigma w}$ 。边际风险贡献

$$MRC_i = \frac{(\Sigma w)_i}{\sigma_p}$$

表示“资产 i 的权重再加一点，组合风险增加多快”。再乘当前权重 w_i ，得到风险贡献 RC_i 。对于这种一阶齐次风险度量，有

$$\sum_i RC_i = \sigma_p.$$

这条加总恒等式是最重要的复核之一。

案例推演

工作流是：

1. 从样本收益出发估计 μ 与 Σ ;
2. 计算组合波动率 $\sigma_p = \sqrt{w^T \Sigma w}$;
3. 若用 Euler 分解，则资产 i 的边际风险贡献与总风险贡献分别为

$$MRC_i = \frac{(\Sigma w)_i}{\sigma_p}, \quad RC_i = w_i MRC_i.$$

4. 检查 $\sum_i RC_i = \sigma_p$;
5. 再进入 VaR/ES 与压力测试。

Zoey Lin

专题 I

从市场数据到风险报告：一条完整的计算链

本专题将前面的方法压缩成一个可以复算的实例。它不是某个真实交易日的行情，而是一组经过控制的教学数据，目的在于使每个风险指标都有明确的单位与位置。

I.1 先核实合约和报价口径

假设持有 10 份执行价 $K = 100$ 、期限 $T = 1$ 的欧式看涨期权，每份合约乘数为 1；股票价格 $S_0 = 100$ ，无风险利率和股息率都为零，年波动率 20%。用专题 G 的计算，单份 call 价值 7.96556，总市值 $10 \times 7.96556 = 79.6556$ 。

I.2 计算最容易用错单位的 Greeks

$\Delta = N(0.1) = 0.5398278$ ；十份合约总 Delta 为 5.398278 股。Gamma 为

$$\Gamma = \frac{\phi(0.1)}{100 \times 0.2 \times 1}, \quad \phi(0.1) = \frac{e^{-0.005}}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.3969525,$$

所以单份 $\Gamma = 0.0198476$ ，十份 $\Gamma = 0.198476$ 。Vega 单份为 $100 \times 0.3969525 \times 1 = 39.69525$ （每波动率绝对变化 1.00 的价格变化），所以每 1 个波动率百分点约为 0.3969525 元/份。

I.3 预测市场小变化时的损益

若股票上涨 1 元，隐含波动率从 20% 上升到 21%，忽略 Theta、Vanna、Volga 与更高阶项：

$$\begin{aligned} \Delta C &\approx \Delta \cdot \Delta S + \frac{1}{2} \Gamma (\Delta S)^2 + \nu \Delta \sigma \\ &= 0.5398278 \times 1 + \frac{1}{2} \times 0.0198476 \times 1^2 + 39.69525 \times 0.01 \\ &= 0.5398278 + 0.0099238 + 0.3969525 = \boxed{0.9467041}. \end{aligned}$$

十份合约的价格变化近似是 9.467041 元。若当前是空头十份，价格上涨所造成的持仓损益符号应取负；持有正 Delta 股票对冲后，股票端的损益则相反。

I.4 三个复核层次

第一，检查合约乘数：同样一个期权报价，乘数 1 和乘数 100 的风险量不同 100 倍。第二，检查波动率口径：Vega 39.69525 的输入 $\Delta \sigma$ 应是 0.01，而不是 1。第三，进行完全重估，把 $S = 101, \sigma = 21\%$ 直接代回 BSM 算新价格，比较与 Taylor 近似的差异，才知道本次近似误差有多大。

I.5 作为书末复习模板

任何完整的金融计算至少应该交代四项内容：模型与参数假设、具体计算、单位与数量级检查、独立复核方式。这四项比“公式记得多”更能反映一个人是否已经真正掌握了计算。

9 风险数字的单位与尾部含义

9.1 VaR 与 ES 计算的是不同问题

有 1000 万元组合，假设一天收益在近似正态分布下均值为零，标准差为 1.5%。单日 95% VaR 采用左尾 5% 分位值 $z = -1.64485$ ，对应亏损阈值

$$VaR_{95\%} = 10^7 \times 1.64485 \times 0.015 \approx 246728 \text{元}.$$

该数值反映模型给出的左尾临界损失，不能直接说超过这一数额的损失只会发生一次，实际尾部概率还依赖模型能否正确描述市场。

ES 则考察尾部损失的平均值。如果若干尾部损失是 30, 22, 18, 15, 10 万元，这五个观测点的平均损失为

$$ES = \frac{30 + 22 + 18 + 15 + 10}{5} = 19 \text{万元}.$$

这个经验平均数只有在五个观测确实代表所选置信水平的尾部样本时，才能称为该样本定义下的 ES 估计。

9.2 相同的数字为何会对应不同的风险

期权 Vega 若写为 27.92，通常表示波动率小数变化 1，期权价格约变化 27.92。因此隐含波动率从 0.25 上升到 0.26，预计价格变化约为

$$\Delta C \approx 27.92 \times 0.01 = 0.2792.$$

如果交易系统显示“每一个波动率百分点的 Vega”，则应报告约 0.2792。报告数量级相差 100 倍，原因可能只是波动率计量单位不同。DV01 的“每 1 bp”与 Greeks 的“每 1 元股价”也应清楚注明。

同一思路可用于组合情景分析。若持有 100 份 call，单份 Delta 为 0.4568、Gamma 为 0.02234、Vega 为 27.92，假设股价上升 2 元、波动率上升 1 个百分点，那么忽略时间流逝与交叉高阶项的每份价格近似变化为

$$\begin{aligned} \Delta C &\approx \Delta \Delta S + \frac{1}{2} \Gamma (\Delta S)^2 + \nu \Delta \sigma \\ &= 0.4568 \times 2 + \frac{1}{2} (0.02234) \times 4 + 27.92 \times 0.01 \\ &= 0.9136 + 0.04468 + 0.2792 = 1.23748. \end{aligned}$$

多头 100 份的近似盈利为 123.748 元，空头则为同样金额的损失。这个计算还没有包含对冲股票、手续费和资金成本；实际交易账本要逐项补齐。

VaR 与 ES 的口径核定

VaR 的输入是损失随机变量 L ，数值越大表示亏损越严重。给定置信水平 α ，连续损失分布的 VaR 常写为

$$\text{VaR}_\alpha(L) = \inf\{\ell : P(L \leq \ell) \geq \alpha\}.$$

如果当天资产收益记为 R ，组合市值为 V ，简单收益近似下损失可写作 $L = -VR$ 。在收益和损失之间切换时，尾部方向必须相应改变。

十日样本的完整校正

仍使用十个收益（百分数）

$$-2.0, -1.2, -0.8, -0.3, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.9, 1.1.$$

样本均值为 -0.1% ，样本标准差为 0.9809293% 。在 1000 万元组合上，按最近秩定义的 90% 历史 VaR 为 12 万元；按 Type 7 线性插值，90% 历史 VaR 为 12.8 万元。采用正态分布并估计均值和样本标准差时，90% 参数 VaR 约为 13.5711 万元。三者不能不加说明地当成同一个结果。

ES 的定义和样本演示

对连续分布且满足相应条件时，

$$\text{ES}_\alpha(L) = E[L \mid L \geq \text{VaR}_\alpha(L)].$$

当分布在分位点存在质量时，需采用分位数积分等更一般的定义。若某五个观察恰好代表指定尾部的全部样本，损失为 30, 22, 18, 15, 10 万元，则尾部均值为

$$(30 + 22 + 18 + 15 + 10)/5 = 19 \text{ 万元}.$$

这只是一组样本上的平均，不能在不知道样本采集规则时称为任意置信水平下的 ES。

正态模型的一日风险

若组合价值 1000 万元、日均值为零、日标准差为 1.5%，95% 单日参数 VaR 为

$$10^7 \times 1.6448536 \times 0.015 = 246728.04 \text{ 元}.$$

当分布偏斜、厚尾或市场发生跳跃时，正态模型可能显著低估尾部，实务中应结合压力情景与模型外样本检查。

损失分位数与尾部均值

风险度量必须先把收益写成损失。设一个组合有十个等概率的单日损失情景（万元），从小到大排列为

$$-8, -5, -2, 0, 1, 3, 5, 8, 12, 20.$$

以广义分位数 $\text{VaR}_\alpha = \inf\{\ell : F_L(\ell) \geq \alpha\}$ 定义， $\alpha = 0.9$ 时，累积概率达到 90% 的最小损失是第九个值 12。因此本例的 90% VaR 为 12 万元。

离散分布下的 ES

若采用分位数积分定义

$$\text{ES}_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}_u \, du,$$

在这组十个等概率样本中，90% 至 100% 的尾部恰好由最大一项损失 20 万元占据，因此 $\text{ES}_{0.9} = 20$ 万元。若置信水平为 80%，尾部是 12 万元与 20 万元两项的平均，得到

$$\text{VaR}_{0.8} = 8 \text{ 万元}, \quad \text{ES}_{0.8} = \frac{12 + 20}{2} = 16 \text{ 万元}.$$

容易出现的一种误解是，将 $L \geq \text{VaR}_{0.8} = 8$ 的所有观察简单平均；这样会把阈值本身的等号质量一起纳入，在存在离散概率质量时与分位数积分定义不同。按分位数积分定义计算，可准确指定最坏 20% 的概率质量。

历史法与参数法各自使用什么假设

历史法把观察到的损失当作等概率情景。它依赖数据窗口与经验分位数定义；样本不足时，尾部估计会高度不稳定。参数法先假设收益分布，例如 $R \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，再求收益低分位数。两种方法只有在样本、估计方式和分布假设恰好相配时才可能接近。

$$\text{VaR}_\alpha = V(-\mu + z_\alpha \sigma),$$

其中 z_α 为标准正态分布的 α 分位数，这个表达式对应简单收益与损失 $L = -VR$ 的约定。使用厚尾模型或市场跳跃情景时，需要重新评估尾部。

怎样读一份风险报告

一份可供复核的报告应该说明观察窗口、数据频率、估计参数、分位数口径、损失正负号、持仓市值和风险期限。标准化记录这些细节，可以防止把一日 95% VaR 和十日 99% VaR 放在同一张图中直接比较。

第十部分

第十部分 综合习题与完整解答

Zoey

第 29 章

补充训练：从概念辨析到完整计算

本章的题目不要求用某种固定写法作答。建议先判断方向和量级，再代数字；答案给出足够的中间计算，以便核对。

29.1 利率与现值

题 1. 某银行名义年利率 6%，按季度复利。问有效年利率及三年后 100 元的终值。

季度利率为 $0.06/4 = 0.015$ ，一年增长因子 $(1.015)^4 \approx 1.06136355$ ，所以有效年利率约为 6.1364%。三年共有 12 季，终值

$$100(1.015)^{12} \approx 119.56.$$

不能直接计算 $100(1 + 0.06)^3$ ，因为它采用的是每年计息一次的不同约定。

题 2. 一项投资今天花 100 元，未来三年末各收 40 元。贴现率为 8% 时应否接受？IRR 大致是多少？

依次贴现的三笔现值约 37.0370, 34.2936, 31.7533；所以 NPV 为 $3.0839 > 0$ 。如果没有其他约束，该项目在 8% 资本成本下创造正净现值。求 IRR 则要解 $-100 + 40/(1+x) + 40/(1+x)^2 + 40/(1+x)^3 = 0$ ，结果约 9.701%。IRR 高于资本成本与 NPV 为正相符。

29.2 概率与信息

题 3. 随机变量 X 以相同概率取 -2 和 4。先求均值与方差，再分析“平均值等于 1”是否表示每次很可能得到 1。

$$E[X] = \frac{-2 + 4}{2} = 1, \quad \text{Var}(X) = \frac{(-2 - 1)^2 + (4 - 1)^2}{2} = 9.$$

标准差为 3。这里 X 从不取 1，因此期望是一种概率加权中心，不是“最可能结果”。

题 4. 两个变量的相关系数为 0，是否意味着两者独立？

不一定。以对称取 -1, 0, 1 的 X 与 $Y = X^2$ 为例， $E[X] = 0$ 且 $E[XY] = 0$ ，协方差为零；但只要知道 X ， Y 也就确定了。

29.3 债券与收益率

题 5. 某四年期票息债，面值 100，每年付息 6 元。收益率为 5% 时值多少钱？若变成 6% 呢？

$$P(5\%) = \frac{6}{1.05} + \frac{6}{1.05^2} + \frac{6}{1.05^3} + \frac{106}{1.05^4} \approx 103.54595.$$

收益率为 6% 时价格正好为 100。收益率上涨造成价格下降，这也是 $P'(y) < 0$ 的具体数值表现。

题 6. 若某组合 DV01 为每 bp 3000 元，收益率平行上升 25bp，一阶 P&L 约为多少？

约为 $-3000 \times 25 = -75000$ 元。这个结果仅是一阶久期估计；利率变动较大时应做凸性修正或直接重定价。

29.4 二叉树与期权

题 7. 股票从 100 出发，一期后可能到 120 或 90，无风险增长因子 1.05。执行价 100 的欧式 Call 现价多少？

复制组合 $\Delta = 2/3, B = -57.142857$ ，故 $C_0 = 9.523810$ 。风险中性概率 $q = (1.05 - 0.90)/(1.20 - 0.90) = 0.5$ ，贴现期望同样是 $10/1.05 = 9.523810$ 。

题 8. 解释为什么该模型中的 $q = 0.5$ 不等于“真实上涨概率为 50%”。

因为 q 来自无套利复制条件，目的是让期权价格与可复制资产价格一致。真实上涨概率可以不同；只要市场结构和可交易资产价格相同，复制价格便不依赖该真实概率。

29.5 随机微积分与数值误差

题 9. 若 $T = 1, W_1 = 0.8$ ，求 $\int_0^1 W_t dW_t$ ，其中积分按 Itô 定义。

利用 $d(W_t^2) = 2W_t dW_t + dt$ ：

$$\int_0^1 W_t dW_t = \frac{1}{2}(W_1^2 - 1) = \frac{1}{2}(0.64 - 1) = -0.18.$$

直接把普通微积分的 $\frac{1}{2}W_1^2 = 0.32$ 当答案，会漏掉二次变差修正 -0.5 。

题 10. 一组 64 条独立模拟路径给出的价格标准误为 0.8，若想降到约 0.2，至少需要多少条同等质量的路径？

标准误按 $1/\sqrt{N}$ 缩放，误差要缩成原来的 $1/4$ ，样本量必须扩大 $4^2 = 16$ 倍。因此约需 $64 \times 16 = 1024$ 条路径。这里假设路径独立、单条路径的收益方差没有改变。

29.6 把一道交易台题拆成三个可检验环节

给定 $S_0 = 100, K = 105, T = 0.5, r = 4\%, q = 1\%, \sigma = 25\%$, 一份欧式 Call 用 Black-Scholes 公式定价约为 5.5482。求一份 Call 在 S 上涨 2 元、隐含波动率上涨 1 个百分点时的一阶与二阶风险估算, 并说明它的误差来源。

采用 $\Delta \approx 0.456788, \Gamma \approx 0.0223368, \nu \approx 27.92098$, 则

$$\begin{aligned}\Delta C_{\text{approx}} &= 0.456788(2) + \frac{1}{2}(0.0223368)(2)^2 + 27.92098(0.01) \\ &\approx 1.23746.\end{aligned}$$

直接重定价给出新价格约 6.79252, 模型价格变动约 1.24436, 差约 0.00690。这个误差来自忽略的股票-波动率交叉项和更高阶项。如果持续了不小的时间, 还要额外计入时间流逝、利息与股息效应。

29.7 作题时值得保留的三行检查

在正式作答末尾写三行即可: 其一, 答案的计量单位是什么; 其二, 结果的方向是否符合价格或概率的常识; 其三, 有没有另一种可用来复核的关系式 (例如贴现现金流直接定价、复制组合、Put-Call Parity 或重定价)。这三行对避免低级失误的帮助, 通常大于机械记住几十条公式。

第 30 章

综合练习与解题讨论

30.1 训练 1：一题串起 NPV、IRR、Newton 与二分法

二分法与 Newton 法

同一净现值方程可以分别采用二分法和 Newton 法求解。二分法依赖异号区间，迭代稳健；Newton 法利用导数确定更新方向，收敛速度通常更快，但对初值和斜率较敏感。

解答

现金流为 $(-100, 30, 40, 50)$ 。先算 $r = 10\%$ ：

$$NPV = -100 + \frac{30}{1.1} + \frac{40}{1.1^2} + \frac{50}{1.1^3} \approx -100 + 27.273 + 33.058 + 37.566 = -2.103.$$

再算 $r = 8\%$ ：

$$NPV \approx -100 + 27.778 + 34.294 + 39.692 = 1.764.$$

因此 IRR 在 8%-10% 之间。二分法继续试 9%，即可进一步缩小区间。若同时计算导数，则可切换到 Newton，加速收敛。

30.2 训练 2：一题串起债券价格、YTM、Duration、Convexity

解答

面值 100，3 年，票息 5%，年付息，市场收益率 6%。先定价：

$$P = \frac{5}{1.06} + \frac{5}{1.06^2} + \frac{105}{1.06^3} \approx 4.717 + 4.450 + 88.159 = 97.326.$$

价格低于面值，因为票息率 5% 小于市场收益率 6%。接着把三笔现金流的现值乘以时间，除以价格，就得到 Macaulay Duration。再除以 1.06 得修正久期。最后用二阶 Taylor 加 Convexity，就能预测小幅收益率变动下的价格变化。

30.3 训练 3：一题串起二叉树、风险中性概率、复制组合

解答

$S_0 = 50$ ，一期后涨到 60 或跌到 45，执行价 $K = 50$ ，无风险增长因子 1.02。末端 call payoff 为 10 或 0。风险中性概率：

$$q = \frac{1.02 - 0.9}{1.2 - 0.9} = 0.4.$$

期权价格：

$$C_0 = \frac{0.4 \times 10 + 0.6 \times 0}{1.02} = 3.9216.$$

复制 Delta：

$$\Delta = \frac{10 - 0}{60 - 45} = \frac{2}{3}.$$

再解现金头寸，应该得到和 3.9216 相同的初始成本。

30.4 训练 4：一题串起 BSM、Greeks、IV 与对冲

解答

给定 $S = 100, K = 100, T = 1, r = 3\%, q = 0, \sigma = 20\%$ 。第一步先算 d_1, d_2 ；第二步定价；第三步计算 Delta/Gamma/Vega；第四步假设市场价高于模型价，判断 IV 应向上还是向下修正；第五步构造 Delta 中性头寸。

结果核对

这一题的真正训练目标不是得到某个固定数字，而是能口头说出完整顺序：

参数 $\rightarrow d_1, d_2 \rightarrow$ 价格 $\rightarrow$ Greeks $\rightarrow$ IV $\rightarrow$ 对冲。

30.5 训练 5：一题串起 Monte Carlo、标准误、方差缩减**解答**

如果 10000 条路径得到期权价格 5.40，payoff 样本标准差 12，则

$$SE = \frac{12}{\sqrt{10000}} = 0.12.$$

95% 置信区间约为

$$5.40 \pm 1.96 \times 0.12 = [5.165, 5.635].$$

如果想把标准误降到 0.06，需要把路径数扩大到 4 倍，即约 40000 条；也可以尝试控制变量，减少每条路径本身的方差。

30.6 训练 6：一页一题的九个“看图先估”挑战

估算与数量级

练习时先判断结果的正负、单位和数量级，再代入数值。估算有助于辨认贴现方向、概率权重和风险敏感度的常见错误，也可用来检查计算器给出的结果。

1. 收款 100 元发生在一年后，年利率 5%。今天的现值比 100 大还是小？约多少？
2. 一个收益变量均值 0，标准差 2。观察值 $x = 4$ 对应 z 是多少？
3. 债券收益率由 4.00% 升到 4.10%，变化了多少 bp？价格方向如何？
4. 两个资产都涨时，协方差通常偏正还是偏负？
5. 空头看涨期权的 Delta 为负，通常要买股票还是卖股票来对冲？
6. 标准正态 Z 的左侧概率 $P(Z < 0)$ 是多少？
7. Monte Carlo 标准误为 0.4，样本方差近似不变。要降为 0.2，样本量应乘多少？
8. $w = (0.7, 0.3)$ ，相关性从 1 降到 0，在波动率不变时组合风险一般增加还是降低？
9. 一个普通固定利率债券的 Duration 为正。利率上升 1bp 时，价格一阶变动是什么符号？

逐项答案（要把判断理由一并说出来）

解答

1. $PV = 100/1.05 \approx 95.24$ ，小于 100，因为把未来的钱折到今天。
2. $z = (4 - 0)/2 = 2$ ，在均值右边两个标准差。
3. $0.10\% = 10\text{bp}$ ；债券价格通常下降。
4. 偏正，因为两列离差常同号，逐日乘积更常为正。
5. 买股票；空 Call 的负 Delta 需要股票的正 Delta 来抵消。
6. 0.5，来自标准正态分布的左右对称。
7. 乘 4： $SE \propto 1/\sqrt{N}$ 。
8. 通常降低：交叉协方差项变小，分散化改善。
9. 负号： $\Delta P/P \approx -D_{mod}\Delta y$ 。

30.7 训练 7：把“四个核心运算”迁移到完全不同的题型

相关知识

很多题目表面不同，但在计算层面可以归入以下四类：

基本动作	金融场景
解 $f(x) = 0$	IRR、YTM、隐含波动率
矩阵二次型	组合方差、风险贡献、最小方差组合
条件期望回溯	二叉树、美式期权、LSM
一阶 / 二阶 Taylor	Duration / Convexity、Delta / Gamma

变式

变式 A：若一张债券价格太高，而你需要使模型价降低到市场价，应该提高还是降低 YTM？**提高**。

变式

变式 B：若 Black–Scholes 模型价低于市场价，且 Vega 为正，该往哪个方向调整隐含波动率？**提高**。

结果核对

两题的数值算法都是 Newton，但**导数符号不同**：债券 $dP/dy < 0$ ，看涨期权通常 $\partial C/\partial \sigma > 0$ 。所以同样的价格误差，对未知量的调整方向可能相反。

附录 A：最值得反复训练的 20 个计算动作

1. 把百分数写成小数；
2. bp 与百分点换算；
3. 时间单位统一；
4. 画现金流时间线；
5. 画状态树；
6. 正态标准化；
7. 条件期望回溯；
8. 协方差手算；
9. $w^T \Sigma w$ 分步算；
10. 解线性方程组；
11. Newton 求根；
12. Put-Call Parity；
13. Delta/Gamma 二阶近似；
14. Bump-and-revalue；
15. Monte Carlo 标准误；
16. 反变量与控制变量；
17. Cholesky；
18. Duration/Convexity 近似；
19. VaR/ES；
20. 边界与恒等式复核。

附录 B：14 天二刷建议

Day	任务
1	时间价值、利率口径、年金与 NPV/IRR, 训练“单位统一 + 画时间线”。
2	期望、方差、正态标准化。
3	条件期望、Bayes、协方差和相关。
4	债券定价、YTM。
5	Duration、Convexity、DV01。
6	Bootstrap、远期利率、Swap。
7	组合方差、GMV、CAPM。
8	远期、Parity、一步复制。
9	二叉树与美式期权。
10	布朗运动、二次变差、Itô。
11	BSM 闭式解、Greeks、IV。
12	Monte Carlo、控制变量、Cholesky。
13	VaR、ES、GARCH、压力测试。
14	完成 3 个综合案例并写出自己的错误诊断树。

全书数值复核与阅读索引

本次继续保留原书已建立的概念顺序。新加的十个精读专题主要处理公式之间的接缝，例如连续利率与离散增长因子、条件信息与方差分解、协方差矩阵与约束优化、二叉树节点价值与提前执行，以及随机微积分和对数正态期权价格。

已复核的重点数值

模型或算例	复核数值
三笔年末 40 元的现金流，投入 100 元，内部收益率	9.70102574%
四年票息 6 元、面值 100、收益率 5%，债券价格	103.5459505
同一债券的修正久期与凸性	3.5040672, 16.2089764
两资产最小方差组合，第一资产权重	0.75
两期美式看跌， $u = 1.1, d = 0.9, R = 1.02, K = 100$	4.1522491
欧式看跌，同一两期树参数	3.3833141
Black-Scholes 看涨价， $S = 100, K = 105, T = 0.5$	5.5481663
Black-Scholes 看跌价，相同参数	8.9677791
BSM Delta、Gamma、Vega	0.456788, 0.022337, 27.920983
十个收益观察样本，样本标准差	0.9809293%

上述基准数值由可重复运行的独立程序逐项核查，包括债券现金流直接求和、Newton 求根与二分求根交叉核验、二叉树节点回溯、期权平价关系，以及对 Delta 和 Vega 的中心差分核验。

审校范围与局限

本版核对了 30 项重点数值与恒等式，并针对易混淆的符号、计量单位和离散尾部分位数增加了说明。该记录不等于对全书每道练习、每条引理与每张图的逐项第三方审定。若用于课程教学或公开传播，建议进一步逐题核查复杂模型的假设条件，并保留可复现的原始计算表。

语言修订的取向

章节正文尽量通过数学对象、问题背景和运算过程组织叙述。解释一个概念时，首先交代它用于回答的问题；随后给出定义、推导与算例，必要时补充反例或适用条件。比较两种方法时明确比较的标准，避免只通过重复的强调句制造层次。旧版的部分行文仍保留历史痕迹，后续应结合原始可编辑文件继续全稿校订。

结语 金融数学的基本计算结构

计算方法的回顾

本书的计算方法可以归纳为求根、条件期望、Taylor 展开和矩阵运算。现金流定价、衍生品估值与组合风险分析都反复用到这些结构。复习时宜保留假设，并尝试用独立方法验证结论。

结果核对

最后的总复核：

- 结果方向对吗？
- 单位一致吗？
- 大小量级合理吗？
- 有第二种方法复核吗？
- 能不能把它迁移到另一个模型？